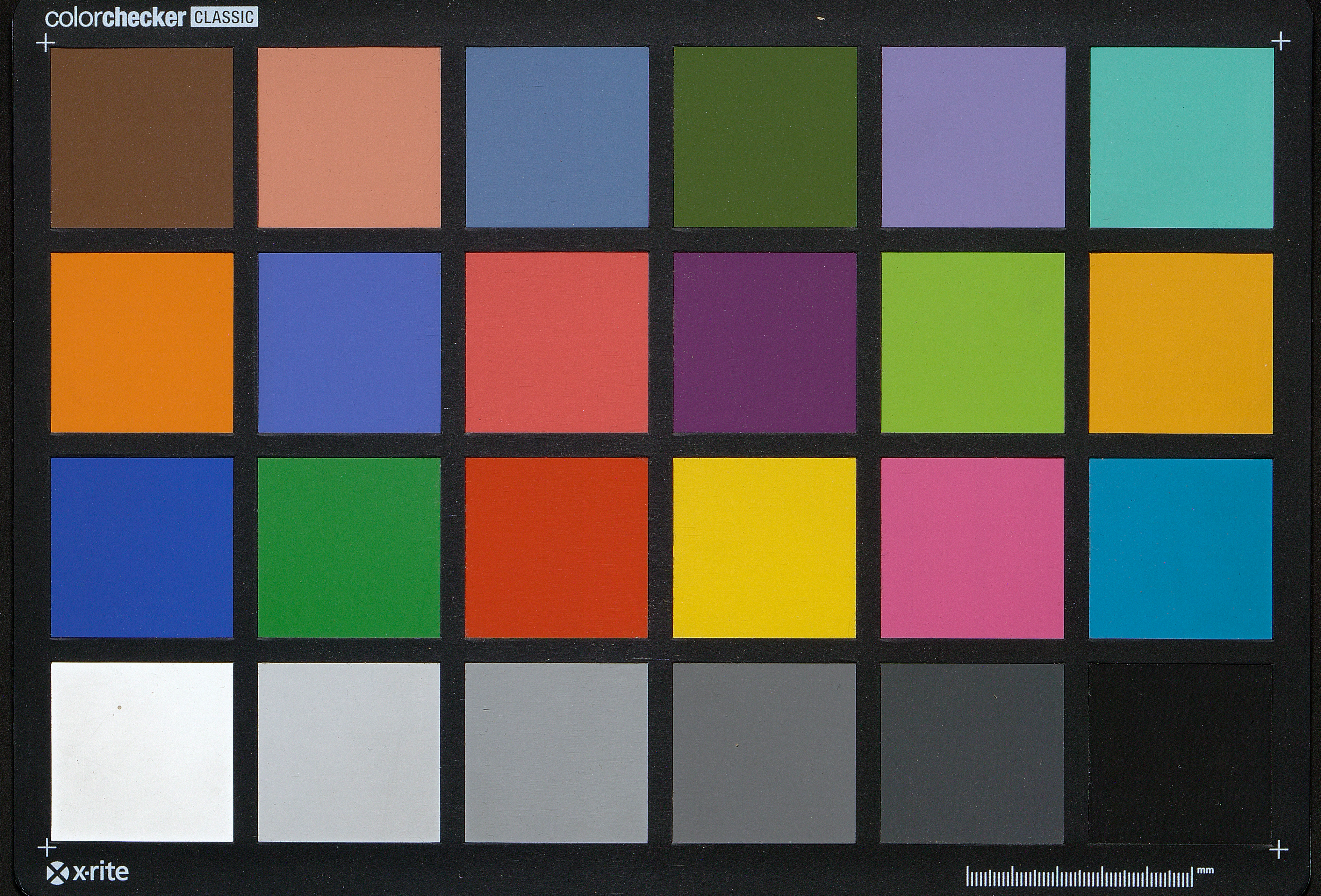

colorchecker CLASSIC
x-rite
mm


A
1

Mécanique rationnelle.

Cours de M. Appell

à la Faculté des sciences

1891 – 1892.

1er cahier.

Louis Couturat

Papeterie Générale des Écoles, 80, Boul. St-Germain.

Cours de Mécanique rationnelle
professé par M. Appell
à la Faculté des sciences.
1891–1892.

II.



Table

Préliminaires.

La mécanique est la science des mouvements de la matière et des forces qui produisent ces mouvements. Cette science se propose donc un double problème :

1° Etant donné un système matériel sur lequel agissent des forces données, trouver le mouvement que prend ce système.

2° Etant donné un système matériel en mouvement, trouver les forces qui lui impriment ce mouvement.

Comme cas particulier, la mécanique étudie le problème suivant : Etant donné un système matériel en repos, trouver les forces qui le maintiennent au repos. C'est le problème de l'équilibre, qui fait l'objet de la statique. Les deux problèmes généraux font l'objet de la dynamique.

Avant d'aborder l'étude de la statique et de la dynamique, nous exposerons quelques théories de géométrie et de cinématique dont nous aurons besoin dans cette étude.

— En géométrie, nous étudierons la théorie des vecteurs (ou des grandeurs géométriques, ou des quantités dirigées), qui a pour auteurs principaux : Chasles, Mœbius, Poinsot et Plücker. M. Kœnigs (Journal de Mathématiques) a appliqué cette théorie à l'étude des volumes engendrés par un contour de forme quelconque se mouvant dans l'espace. — Il suffit, pour montrer l'importance de cette théorie en mécanique, de dire qu'on représente par des vecteurs : 1° les vitesses, 2° les accélérations, 3° les rotations, 4° les forces, c.à.d. toutes les quantités dont s'occupe la mécanique.

Théorie des vecteurs.

On appelle vecteur tout segment de droite A.B. ayant un sens déterminé, par exemple A. pour origine et B. pour extrémité ; ce sens s'indique dans la notation par l'ordre des lettres, et dans les figures par une flèche ayant sa pointe en B.

Pour déterminer un vecteur, on peut se donner ~~les coordonnées~~ l'origine ou point d'application, la direction, c.à.d. la demi-droite indéfinie issue de l'origine dans le sens du segment, enfin la longueur ; en portant cette longueur à partir de l'origine sur la demi-droite, on détermine le vecteur.

Analytiquement, on pourra définir un vecteur par les coordonnées de l'origine (x_1, y_1, z_1) et par celles de l'extrémité (x'_1, y'_1, z'_1) dans un système de 3 axes. On peut aussi, et c'est le mode le plus fréquent de représentation, le définir par les coordonnées de l'origine et par les projections (X_1, Y_1, Z_1) du segment sur les 3 axes coordonnés. Ces projections doivent être prises avec les signes que détermine leur position sur les axes, suivant qu'elles sont dirigées dans le sens positif ou négatif sur ces axes par rapport à la projection du point d'application.

Il est facile de passer du 1er mode de représentation au 2e, par les formules évidentes :

$$\begin{cases} X_1 = x'_1 - x_1 \\ Y_1 = y'_1 - y_1 \\ Z_1 = z'_1 - z_1 \end{cases}$$

Il nous faut maintenant définir le sens d'une rotation autour d'un axe. — Étant donné un axe Z'Z sur lequel on a fixé un sens positif, par exemple de Z' en Z, on dit qu'un mobile tourne autour de cet axe dans le sens positif quand un observateur ayant les pieds en Z' et la tête en Z voit le mobile passer devant lui de gauche à droite.

On peut à présent définir le moment d'un vecteur par rapport à un point.

Étant donnés un vecteur A_1B_1 et un point quelconque A de l'espace le moment du vecteur A_1B_1 par rapport à A est un nouveau vecteur ayant pour origine A, pour direction une perpendiculaire au plan AA_1B_1 et pour longueur le produit de A_1B_1 par la distance AB de A à A_1B_1. Reste à déterminer le sens de ce vecteur ; ce sens devra être tel qu'un mobile allant de A_1 en B_1 sur le 1er vecteur tourne autour de celui-ci dans le sens positif. Le moment AG_1 est ainsi déterminé.

On voit immédiatement que la valeur absolue du moment AG_1 est égale au double de l'aire du triangle AA_1B_1, car celle-ci est égale à :

$$\frac{AB \times A_1B_1}{2}.$$

On voit aussi que le moment ne change pas, soit que l'on transporte le segment A_1B_1 le long de sa direction, soit que l'on transporte A sur une direction parallèle à A_1B_1.

Soit un axe donné Z'Z ; si l'on prend le moment du vecteur A_1B_1 par rapport à un point A de cet axe, la projection de ce moment sur l'axe est indépendante de la position du point A.

Soit en effet AG_1 le moment de A_1B_1 par rapport à A : nous savons qu'il est perpendiculaire au plan AA_1B_1 et égal au double de l'aire du triangle AA_1B_1. Menons par A un plan perpendiculaire à l'axe, et soient $a_1 b_1$ les projections de A_1B_1 sur ce plan ; le tr. Aa_1b_1 est la projection sur ce plan du triangle AA_1B_1. D'autre part, AG_1 se projette sur Z'Z suivant Ag_1. Il s'agit de prouver que Ag_1 est constante quand A se déplace sur l'axe. Soit θ l'angle $G_1\hat{A}g_1$; on a :

$$Ag_1 = AG_1 . \cos\theta$$

D'autre part, comme l'angle des plans AA_1B_1, Aa_1b_1 est égal à θ, on a également : aire a_1Ab_1 = (aire A_1AB_1). $\cos\theta$

Or on sait que $AG_1 = 2$ (aire A_1AB_1) ; on en conclut :

$$Ag_1 = 2(\text{aire } a_1Ab_1) = \text{constante}$$

car quel que soit le point A la projection du triangle AA_1B_1 sera toujours la même.

Ainsi la projection sur l'axe Z'Z du moment du vecteur A_1B_1 par rapport à un point quelconque de cet axe est une quantité invariable. C'est cette quantité, prise avec son signe, qu'on appelle le moment du vecteur par rapport à l'axe. On voit qu'il est positif quand un mobile allant de A_1 en B_1 suivant le segment donné tourne autour de l'axe dans le sens positif.

On peut trouver plusieurs expressions géométriques de ce moment.

Soit δ la plus courte distance du vecteur à l'axe, α l'angle du vecteur et de l'axe. Le moment du vecteur par rapport à l'axe sera égal en valeur absolue à : $A_1B_1 . \delta \sin\alpha$.

En effet, $Ag_1 = 2(\text{aire } a_1Ab_1) = \delta . a_1b_1$ et : $a_1b_1 = A_1B_1 . \sin\alpha$.

(δ se projette en vraie grandeur.) $Ag_1 = A_1B_1 . \delta \sin\alpha$.

Cette formule permet de voir dans quels cas le moment est nul. Il l'est si la longueur du vecteur est nulle, s'il rencontre l'axe (δ nulle) ; s'il est parallèle à l'axe ($\sin\alpha = 0$) Ces 2 derniers cas se résument en disant : si le vecteur est dans un même plan avec l'axe

~~On peut aussi repr~~ Quant au signe du moment, on le déterminera par la règle donnée précédemment.

On peut aussi représenter le moment par le volume d'un tétraèdre. Prenons sur l'axe une longueur quelconque AB ; elle détermine avec A_1B_1

un tétraèdre ; on va prouver que le moment de A_1B_1 par rapport à l'axe est égal à : $\dfrac{6\,(\text{vol. } ABA_1B_1)}{AB}$

En effet, on peut sans changer le volume du tétraèdre faire glisser A_1B_1 en a_1b_1 suivant des parallèles à AB ; or le tétraèdre ABa_1b_1 a pour base le triangle Aa_1b_1 et pour hauteur AB ; donc son volume est : $V = \dfrac{AB\,(\text{aire } Aa_1b_1)}{3}$

A₁ B B₁ a₁ A b₁

Or : aire $Aa_1b_1 = \frac{1}{2}$ moment de A_1B_1

d'où : $V = \dfrac{AB\,(\text{mom. } A_1B_1)}{6}$ ou : mom. $A_1B_1 = \dfrac{6V}{AB}$

Il suffit de prendre AB égale à l'unité de longueur pour se débarrasser du dénominateur. Le signe du moment sera déterminé comme ci-dessus par le sens de la rotation.

Pour obtenir maintenant l'expression analytique du moment, prenons 3 axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, et, pour en fixer l'orientation, convenons une fois pour toutes que, pour appliquer Ox sur Oy, il faut faire tourner la figure de $90°$ autour de Oz dans le sens positif. (c'est le contraire dans les axes coordonnés usités en mécanique céleste.)

Soit un vecteur A_1B_1 ; nous allons calculer son moment par rapport à l'axe des z.

Supposons ce vecteur donné par les coordonnées x_1, y_1, z_1 de son origine A_1 et les projections X_1, Y_1, Z_1. — Les coordonnées de B_1 seront :

$x_1' = x_1 + X_1 \qquad y_1' = y_1 + Y_1 \qquad z_1' = z_1 + Z_1$

Soient a_1b_1 les projections de A_1B_1 sur le plan xOy ; le moment de A_1B_1 par rapport à Oz est égal au double du triangle Oa_1b_1, en valeur absolue ; quant à son signe, il est celui de la rotation d'un mobile allant de

A_1 en B_1. Le moment sera ensignent OG_1 porté sur Oz.
Soient r, θ; r', θ' les coordonnées polaires de a_1, b_1 dans le plan des xy.
On a les relations : $x_1 = r\cos\theta \quad y_1 = r\sin\theta$
Supposons qu'un mobile passe d'un mouvement continu de a_1 en b_1 : l'angle θ' sera déterminé à la fin de ce mouvement, si l'on a pris soin de fixer la valeur de l'angle θ d'une façon univoque. L'angle $a_1\hat{O}b_1$ aura alors une valeur bien déterminée : $|\theta' - \theta| < \pi$.
Cette différence aura le même signe que la rotation du mobile allant de A_1 en B_1, donc elle aura le même signe que le moment. Or le moment est égal en valeur absolue à : $2(\text{aire } Oa_1b_1) = rr'\sin(\theta' - \theta)$
et comme le sinus d'un angle inférieur à π a le même signe que lui, le moment aura le même signe que cette expression ; elle représente donc ~~le moment~~ complètement le moment.
Revenons aux coordonnées cartésiennes, pour transformer cette expression :
$rr'\sin(\theta' - \theta) = rr'(\sin\theta'\cos\theta - \cos\theta'\sin\theta)$ Or : $\begin{cases} r'\cos\theta' = x_1 + X_1 \\ r'\sin\theta' = y_1 + Y_1 \end{cases}$
$x_1(y_1 + Y_1) - y_1(x_1 + X_1) = x_1Y_1 - y_1X_1$
Telle est la formule du moment de A_1B_1 par rapport à l'axe Oz. Si l'on appelle L_1, M_1, N_1 les moments de ce vecteur par rapport aux 3 axes, on aura par raison de symétrie :

$$\begin{cases} L_1 = y_1Z_1 - z_1Y_1 \\ M_1 = z_1X_1 - x_1Z_1 \\ N_1 = x_1Y_1 - y_1X_1 \end{cases}$$

Pour avoir l'expression du moment du vecteur A_1B_1 par rapport au p. O, il suffira de considérer L_1, M_1, N_1 comme les projections de ce moment OG_1 sur les 3 axes coordonnés. Ces 3 quantités sont aussi les coordonnées de l'extrémité G_1 de ce vecteur.
Il est aisé de déduire des formules précédentes les 2 identités :

$$L_1X_1 + M_1Y_1 + N_1Z_1 = 0 \qquad L_1x_1 + M_1y_1 + N_1z_1 = 0$$

La 1e exprime que le vecteur OG_1 est rectangulaire avec A_1B_1; cela résulte de la définition même du moment.
La 2e exprime que le moment OG_1 est perpendiculaire au rayon vecteur OA_1.
Si l'on ajoutait ces 2 identités, on en conclurait la suivante :

$$L_1 x'_1 + M_1 y'_1 + N_1 z'_1 = 0$$

qui signifie que le moment OG_1 est perpendiculaire à OB_1; tout cela est évident puisque par définition le moment est perpendiculaire au plan OA_1B_1

— Considérons maintenant un système de vecteurs concourants, c'à d. ayant même origine; soient : AB_1, AB_2, AB_3 - - - - - - - AB_n.
On appelle somme géométrique ou résultante de vecteurs concourants le segment obtenu de la manière suivante : par B_1, extrémité du 1er vecteur, on mène $B_1B'_2$ égal et parallèle au 2e vecteur AB_2; par B'_2, on mène le segment $B'_2B'_3$ égal et parallèle au 3e vecteur AB_3, et ainsi de suite, jusqu'à B'_n, extrémité d'un segment égal et parallèle au dernier vecteur AB_n; on joint AB'_n; c'est la somme que nous voulions définir, et qu'on désigne par la lettre R. — On démontrera tout à l'heure analytiquement que cette résultante est toujours la même quel que soit l'ordre d'ailleurs arbitraire dans lequel on prend les vecteurs composants.
Le polygone $AB_1B'_2B'_3 \ldots B'_n$ s'appelle le polygone des vecteurs.
Dans le cas de 2 vecteurs composants, leur résultante est la diagonale de leur parallélogramme
Dans le cas de 3 vecteurs concourants, leur résultante est la diagonale de leur parallélépipède

Cherchons maintenant une expression algébrique de la résultante dans le cas général de n vecteurs composants. — Soient : $X_1 Y_1 Z_1$ les projections sur les 3 axes du vecteur AB_1, $X_2 Y_2 Z_2$ celles du vecteur AB_2, ... $X_n Y_n Z_n$ celles du vecteur AB_n; $X\ Y\ Z$ celles de R, que l'on veut connaître. On sait que la projection du polygone des vecteurs sur un

axe quelconque est égal à la projection de la résultante sur le même axe. Donc la projection de R sur chacun des 3 axes est égale à la somme algébrique des projections des vecteurs composants sur le même axe :

$$X = \Sigma X_1 \qquad Y = \Sigma Y_1 \qquad Z = \Sigma Z_1$$

Ces formules prouvent que la valeur de R est indépendante de l'ordre dans lequel on prend les vecteurs composants. Si le polygone des vecteurs se ferme, c'est-à-dire si B_n coïncide avec A, la résultante est nulle, et ses projections aussi ; donc dans ce cas les sommes des projections des vecteurs sur chacun des 3 axes sont nulles.

Calculons le moment de la résultante par rapport à l'axe Oz : on sait qu'il est :

$$N = xY - yX$$

(x y z coordonnées du p. A.)

On a d'autre part pour les moments des vecteurs par rapport à Oz :

$$\begin{cases} N_1 = xY_1 - yX_1 \\ N_2 = xY_2 - yX_2 \\ \text{-------} \\ N_n = xY_n - yX_n \end{cases}$$

d'où, en ajoutant membre à membre : $\Sigma N_1 = x\Sigma Y_1 - y\Sigma X_1 = xY - yX = N$.

On aura donc, par raison de symétrie, pour les moments de la résultante R par rapport aux 3 axes :

$$L = \Sigma L_1 \qquad M = \Sigma M_1 \qquad N = \Sigma N_1$$

Ce sont en même temps les projections sur les 3 axes du moment de R par rapport à O, que nous appellerons OG. Les formules précédentes expriment que OG est la somme géométrique des moments $OG_1, OG_2, \dots OG_n$ des vecteurs par rapport au p. O ; en d'autres termes (Théorème de Varignon) :

Le moment de la résultante de vecteurs concourants est égal à la somme géométrique des moments de ces vecteurs.

Si le moment de la résultante est nul, la somme géométrique des moments des composantes l'est aussi ; donc la somme de leurs projections sur chaque axe est nulle.

– Résultante générale et moment résultant d'un système de vecteurs.

Soient A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 ..... A_nB_n n vecteurs quelconques dans l'espace; A un point quelconque.

On appelle résultante générale de ce système de vecteurs par rapport au point A la somme géométrique de n vecteurs égaux et parallèles aux vecteurs donnés, issus du point A.

On appelle moment résultant du système de vecteurs par rapport au p. A la somme géométrique des moments des n vecteurs donnés par rapport au point A.

La résultante générale est évidemment la même en tous les points de l'espace; donc quand A se déplace la résultante générale reste constante en grandeur et en direction. Mais le moment résultant AG peut varier. Pour étudier les variations du moment résultant dans l'espace cherchons d'abord l'expression analytique de la résultante générale OR et du moment résultant OG par rapport à l'origine O.

Le vecteur A_1B_1 étant donné par les coordonnées $x_1\, y_1\, z_1$ du point A_1 et par ses projections X_1, Y_1, Z_1; $L_1\, M_1\, N_1$ étant les projections de son moment OG_1 par rapport à O, on a pour les projections de OR:

$$X = \Sigma X_1 \qquad Y = \Sigma Y_1 \qquad Z = \Sigma Z_1$$

et pour les projections de OG:

$$L = \Sigma L_1 \qquad M = \Sigma M_1 \qquad N = \Sigma N_1$$

Une fois connues ces quantités pour l'origine, nous allons les calculer pour un point quelconque pour en étudier les variations.

Soit $O'(x', y', z')$ ce point quelconque; par ce point menons un nouveau système d'axes $Ox'y'z'$ parallèles aux anciens, et les segments $O'R'$, $O'G'$ relatifs à ce point. $O'R'$ est égal et parallèle à OR; $O'G'$ est le moment résultant du système par rapport à O'. Soient x'_1, y'_1, z'_1 les nouvelles coordonnées du p. A_1; on a les formules de transformation:

$x_1 = x' + x'_1 \qquad y_1 = y' + y'_1 \qquad z_1 = z' + z'_1$

Les projections de A_1B_1 sur les nouveaux axes sont toujours $X_1\ Y_1\ Z_1$.

Calculons les projections $L'_1\ M'_1\ N'_1$ de son moment $O'G'_1$ par rapport à la nouvelle origine O'. On a pour son moment par rapport à $O'z'$:

$$N'_1 = x'_1 Y_1 - y'_1 X_1 = (x_1 - x')Y_1 - (y_1 - y')X_1 = N_1 - x'Y_1 + y'X_1$$

Donc on aura pour les ~~moments~~ projections $L'\ M'\ N'$ de $O'G'$;

$$N' = \Sigma N'_1 = \Sigma N_1 - x'\Sigma Y_1 + y'\Sigma X_1$$

ou, finalement, et par raison de symétrie :

$$\begin{cases} L' = L - y'Z + z'Y \\ M' = M - z'X + x'Z \\ N' = N - x'Y + y'X \end{cases}$$

Le moment résultant dépend donc du point auquel il est relatif.

Au contraire, la résultante générale est la même en tous les points :

$$X' = X \qquad Y' = Y \qquad Z' = Z$$

Des formules précédentes on déduit aisément l'identité :

$$L'X' + M'Y' + N'Z' = LX + MY + NZ$$

qui montre que la projection du moment résultant sur la direction de la résultante générale est constante.

En effet, la résultante générale ayant pour projections X, Y, Z, ses cosinus directeurs sont : $\frac{X}{R} \quad \frac{Y}{R} \quad \frac{Z}{R}$

Posons $\overline{OG} = G$; les cosinus directeurs de ce segment sont :

$$\frac{L}{G} \qquad \frac{M}{G} \qquad \frac{N}{G}$$

Donc le cosinus de l'angle de OR et de OG est :

$$\cos G\hat{O}R = \frac{LX + MY + NZ}{RG}$$

D'où l'on tire : $LX + MY + NZ = RG \cos R\hat{O}G = \text{const.}$

Or $G \cos R\hat{O}G = G_R$ projection de OG sur OR, R est constante ; donc G_R est constante en grandeur et en signe

Il pourra se trouver un point O' ou une série de points où O'G coïncide en direction avec O'R ; exprimons ce fait analytiquement :

$$\frac{L'}{X} = \frac{M'}{Y} = \frac{N'}{Z}$$ Remplaçons L'M'N' par leurs valeurs :

$$\frac{L - y'Z + z'Y}{X} = \frac{M - z'X + x'Z}{Y} = \frac{N - x'Y + y'X}{Z} \qquad (A)$$

Si l'on regarde x'y'z' comme des coordonnées courantes, ces 2 relations définissent le lieu des points où les directions OR et OG coïncident. Or ces 2 équations ~~défi~~ représentent une droite parallèle à la direction OR ; cette droite est appelée l'axe central du système de vecteurs. C'est aussi le lieu des points où le moment résultant est minimum puisque dans ce cas il coïncide avec sa projection sur OR, qui est constante.

La valeur constante du moment minimum est :

$$G_R = G \cos R\hat{O}G = \frac{LX + MY + NZ}{R}$$

L'axe central n'existe évidemment qu'à la condition : $R \gtrless 0$.

Quand la résultante générale est nulle c.à.d. quand on a à la fois :

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0.$$

les quantités L', M', N' sont constantes et respectivement égales à L, M, N — Donc : quand la résultante générale est nulle, le moment résultant est le même en tous les points de l'espace.

Les 3 rapports égaux qui définissent l'axe central (équations A) ~~de~~ sont égaux, en vertu d'une combinaison connue, à :

$$\frac{LX + MY + NZ}{X^2 + Y^2 + Z^2} = \frac{RG \cos R\hat{O}G}{R^2} = \frac{G \cos R\hat{O}G}{R} = \frac{G_R}{R}$$

Il peut arriver qu'au point O le moment résultant soit perpendiculaire à la résultante générale ; on a alors : $\cos R\hat{O}G = 0$.

Alors la projection du moment résultant sur la résultante générale est nulle,

et par conséquent le moment résultant est nul sur l'axe central.
La valeur commune des rapports (A) est 0; les équations de l'axe central sont dans ce cas: $L - y'Z + z'Y = 0$ $M - z'X + x'Z = 0$ $N - x'Y + y'X = 0$
Elles expriment précisément que le moment résultant est nul sur l'axe.
— Nous pouvons toujours prendre l'axe central, une fois connu, pour axe des z; on prendra le sens de la résultante générale pour sens positif sur cet axe. Soit Og le moment résultant en O, positif ou négatif suivant qu'il ~~est dirigé~~ dans le sens de OR ou en sens inverse. Les projections de OR et de OG deviennent:

$$X = 0 \quad Y = 0 \quad Z = R$$
$$L = 0 \quad M = 0 \quad N = g$$

et en un point quelconque O', le moment résultant a pour projections:

$$L' = -y'R \qquad M' = x'R \qquad N' = g = \text{const.}$$

Cette dernière égalité exprime le théorème connu que la projection du moment résultant sur la direction de la résultante générale est constante.
Si nous laissons x', y' constantes, on voit que L' M' N' ne varient pas. Donc le long d'une parallèle à l'axe central, le moment résultant est constant en grandeur et en direction.

Pour connaître complètement les variations du moment, il suffit donc de connaître sa valeur pour tous les points du plan xOy.
D'ailleurs, cette valeur étant la même sur toutes les droites de ce plan issues de l'origine (par raison de symétrie), il suffira d'étudier la variation du moment le long d'une de ces droites, Ox par exemple.

Prenons O' sur Ox: $y' = 0$
Donc $L' = 0$ $M' = x'R$ $N' = g$
La 1e égalité indique que le moment est dans un plan parallèle à yOz.
Sa projection sur le plan zOx est

constamment égale à g, et sa projection sur xOy est proportionnelle à la distance OO'. On voit donc que le moment tourne autour de Ox quand O' s'éloigne de O sur cet axe, et qu'il augmente sans cesse ; il part de la position Og et fait un angle de plus en plus petit avec le plan xOy. A l'infini, le moment résultant est infini et parallèle à Oy. Il est clair que sur l'autre demi-axe Ox' il tournerait dans l'autre sens et tendrait à devenir parallèle à Oy'. En un mot, la direction du moment résultant engendre un paraboloïde hyperbolique qui a pour axe Oz et pour plan directeur le plan zOy.

La considération de la répartition du moment résultant dans l'espace peut servir à définir la correspondance de Chasles entre les points et les plans de l'espace.

Étant donné un point O' de l'espace, on lui fait correspondre le plan P qui passe par O' et est perpendiculaire au moment résultant $O'G'$ relatif à ce point. Réciproquement, à un plan P quelconque on fait correspondre un point O' de ce plan tel que le moment résultant pour ce point soit perpendiculaire au plan. — Le point O' est le foyer du plan P ; le plan P est le plan focal du point O'.

Cherchons l'équation du plan P. Les projections de $O'G'$ sont $L'\ M'\ N'$; on aura : $(x-x')L' + (y-y')M' + (z-z')N' = -(x-x')y'R + (y-y')x'R + (z-z')g = 0$.
ou, en simplifiant : $-xy'R + yx'R + (z-z')g = R(yx'-xy') + (z-z')g = 0$.
Ainsi à tout point de l'espace correspond un plan, et un seul.

Réciproquement, tout plan non parallèle à l'axe central a un foyer et un seul. En effet, soit un plan indéterminé : $Ax + By + Cz + D = 0$, identifions-le au plan perpendiculaire au moment résultant en O' ; on devra avoir :

$$\frac{-y'R}{A} = \frac{x'R}{B} = \frac{g}{C} = \frac{-z'g}{D}$$

Ces 3 équations déterminent les coordonnées x', y', z' du point O', foyer du plan P ;

sauf dans le cas où $C=0$; alors le foyer n'existe plus, et comme le rapport $\frac{\delta}{C}$ est devenu infini, on peut dire que le foyer d'un plan parallèle à l'axe central est à l'infini.

Cette correspondance est analogue à celle des pôles et des surfaces polaires par rapport aux surfaces du 2e ordre. Cette analogie vient de ce que l'équation du plan est symétrique par rapport aux coordonnées du foyer. La différence principale consiste en ce que le foyer est toujours dans son plan focal, ce qui n'arrive dans la correspondance polaire que quand le pôle est sur la surface quadrique.

On peut démontrer les propriétés géométriques suivantes des foyers et plans focaux, analogues aux propriétés connues des pôles et des polaires :
Si un plan P pivote autour d'un point fixe, son foyer décrit un plan fixe qui a pour foyer ce point fixe.
Inversement, si un point mobile parcourt un plan fixe, son plan focal passe toujours par le foyer de ce plan fixe.

— Equivalence des systèmes de vecteurs.

Etant donnés 2 systèmes de vecteurs, on dit qu'ils sont <u>équivalents</u>, quand par rapport à un même point de l'espace ils donnent la même résultante générale et le même moment résultant.

Il suffit que la résultante générale et le moment résultant de ces 2 systèmes soient identiques en un point pour qu'ils le soient en tous les points de l'espace. Ainsi 2 systèmes équivalents ont même axe central, et même moment résultant minimum.

On dit qu'un système de vecteurs est <u>équivalent à zéro</u> ou <u>en équilibre</u> quand sa résultante générale et ~~son~~ moment résultant sont nuls.
— Si cela a lieu en un point de l'espace, cela a lieu en tous les points de l'espace.
On conclut de cette proposition les <u>6 équations de l'équilibre</u>.

$X=0 \quad Y=0 \quad Z=0 \quad L=0 \quad M=0 \quad N=0.$

Cette définition permet de ramener la notion d'équivalence à celle d'équilibre. Pour exprimer, par exemple, que le système S est équivalent au système S', il suffit d'écrire que le système S fait équilibre au système $(-S')$ obtenu en changeant de sens (et de signe) tous les vecteurs du système S'.

En effet, pour qu'il y ait équivalence entre les 2 systèmes, il faut qu'on ait:

$$X = X' \quad Y = Y' \quad Z = Z' \quad L = L' \quad M = M' \quad N = N'$$

ces équations peuvent s'écrire:

$$X - X' = 0 \quad Y - Y' = 0 \quad Z - Z' = 0 \quad L - L' = 0 \quad M - M' = 0 \quad N - N' = 0$$

or ces dernières expriment que le système $(S - S')$ est en équilibre, ou que le système S fait équilibre au système $(-S')$.

Par exemple, le système formé par un certain nombre de vecteurs concourants et celui qui se compose de leur résultante sont équivalents; car leur résultante générale est la même, et leur moment résultant est le même. Donc le système total formé par les vecteurs donnés et leur résultante changée de signe est en équilibre, ou équivalent à 0.

Pour transformer un système de vecteurs donné en un système équivalent, on peut effectuer sur lui les opérations suivantes:

1° Transporter un vecteur en un point de sa direction.

2° Ajouter ou retrancher au système un système de 2 vecteurs égaux et directement opposés.

3° Remplacer plusieurs vecteurs concourants par leur résultante, ou un vecteur unique par plusieurs vecteurs dont il serait la résultante.

On va prouver que ces 3 sortes d'opérations donnent bien un système équivalent au système donné, c.à.d. qu'elles n'altèrent pas les 6 sommes:

$$X = \Sigma X, \quad Y = \Sigma Y, \quad Z = \Sigma Z, \quad L = \Sigma L, \quad M = \Sigma M, \quad N = \Sigma N,$$

1° En transportant un vecteur le long de sa direction, on sait qu'on ne change ni ses projections ni son moment.

2° Ajouter ou retrancher un système de 2 vecteurs égaux et directement opposés, c'est ajouter 0 à chacune des 6 sommes.

3° Composer plusieurs vecteurs ou décomposer un vecteur unique, c'est remplacer dans chacune des 6 sommes plusieurs termes par leur somme ou un seul terme par plusieurs dont il est la somme.

— Un système de vecteurs quelconques est toujours équivalent à un système de 2 vecteurs dont l'un est appliqué en un point arbitrairement choisi.

— Nous allons d'abord montrer que le système donné est équivalent à un système de 3 vecteurs appliqués en 3 points arbitrairement choisis, pourvu qu'ils ne soient pas en ligne droite. Soit en effet un vecteur A_1B_1 non situé dans le plan des 3 points choisis A, B, C. On peut toujours le supposer appliqué en un point A_1 extérieur à ce plan; on le décomposera en 3 vecteurs dirigés suivant A_1A, A_1B, A_1C, et on transportera ces vecteurs respectivement en A, B, C. — Si A_1B_1 est dans le plan ABC, il suffit de mener A_1A, A_1B qui ne coïncident pas (ce qui est toujours possible) et de décomposer le vecteur A_1B_1 en 2 vecteurs dirigés suivant A_1A, A_1B; puis on les transportera en A, B. Quand tous les vecteurs donnés seront décomposés en vecteurs appliqués en A, B, C, on composera ceux-ci en 3 vecteurs résultants AP, BQ, CR.

— Réduisons maintenant ces 3 vecteurs à 2, dont l'un devra passer par B. Menons les plans BAP, BCR. Dans le plan BAP, décomposons AP suivant AB, AB' (B' étant un point quelconque de l'intersection des 2 plans) on aura ainsi, en transportant les vecteurs en B, B', les composantes BP_1, $B'P'_1$. Dans le plan BCR, décomposons de même CR suivant les dr. CB, CB', on aura les 2 vecteurs BR_1, $B'R'_1$. Le système est donc ramené à 3 vecteurs BQ, BP_1, BR_1 appliqués en B, et à 2 vecteurs $B'P'_1$, $B'R'_1$ appliqués en B'.

On les composera de part et d'autre, et on aura les 2 vecteurs résultants BF, B'Φ, dont le 1er passe par le point B choisi; le ~~point~~ B' n'est pas entièrement arbitraire; il est assujetti à se trouver sur l'intersection des plans BAP, BCR. — Il est évident, par construction, que le système BF, B'Φ est équivalent au système proposé, puisqu'on n'a fait subir à celui-ci que des transformations permises.

Cette réduction à 2 vecteurs n'est pas unique, même quand on se donne le point B et qu'on fixe le point B': car on ne change pas le système proposé en appliquant en B et B' 2 vecteurs égaux et directement opposés; or en les composant avec les 2 vecteurs résultants BF, B'Φ, on obtient 2 nouveaux vecteurs résultants, BF', B'Φ', dont le système est encore équivalent au système proposé.

— Il est évident, par définition de l'équivalence, que les 2 vecteurs résultants BF, B'Φ ont même résultante générale et même moment résultant que le système proposé dont ils sont la réduction.

Pour que le système donné soit en équilibre, il faut et il suffit que les 2 vecteurs résultants soient égaux et directement opposés. La condition est manifestement suffisante. Elle est aussi nécessaire: car si la résultante générale du système est nulle, il s'ensuit que les 2 vecteurs F et Φ sont égaux et opposés. Ils sont de plus directement opposés: car le moment résultant est nul; or puisque le moment de F est nul par rapport à B, par exemple, il faut que le moment de Φ par rapport à ce point soit aussi nul, c.à.d. (Φ ≠ 0 par hypothèse) que Φ passe par le point B: les 2 directions B'Φ et BF, déjà parallèles, n'en font plus qu'une. cqfd.

— Si les 2 vecteurs résultants sont égaux et directement opposés, on peut les supprimer; le système proposé se trouve donc réduit à zéro par les opérations permises, quand il est en équilibre; c'est pourquoi il est dit équivalent à zéro.

On vient de voir comment on peut trouver un système équivalent à un système proposé au moyen des 3 opérations élémentaires. ~~Réciproquement~~ étant donnés 2 systèmes de vecteurs équivalents, on peut les transformer l'un dans l'autre par les 3 opérations élémentaires.

En effet, soient S et S' 2 systèmes équivalents. On peut ajouter au système S les 2 systèmes S' et (−S') sans l'altérer ; or S et (−S') sont en équilibre, en vertu de l'équivalence des systèmes S et S' ; donc on peut les supprimer sans altérer le système total. Celui-ci ~~n'est~~ se trouve ainsi réduit au système S', par une série d'opérations permises. Donc les 3 opérations élémentaires suffisent à donner tous les systèmes équivalents à un système donné.

On pourra démontrer les propositions suivantes, qui n'ont qu'un intérêt géométrique :

Le foyer d'un plan quelconque passant par BF est le point (A) où ce plan rencontre B'Φ. — On vérifiera que le plan est perpendiculaire au moment résultant par rapport au point A.

Corollaire : Chacune des 2 droites indéfinies BF, B'Φ est le lieu des foyers des plans passant par l'autre droite.

La quantité constante : $LX + MY + NZ = RG \cos R\hat{O}G$

est égale à 6 fois le volume du tétraèdre construit sur les vecteurs BF, B'Φ.

Soient X', Y', Z' les projections de BF ; X'', Y'', Z'' celles de B'Φ ; on aura :

$X = X' + X''$ $\quad Y = Y' + Y''$ $\quad Z = Z' + Z''$ $\quad L = L' + L''$ $\quad M = M' + M''$ $\quad N = N' + N''$

et on portera ces valeurs dans le 1er membre ; ~~la pro sommes~~ et en tenant compte des identités ; $L'X' + M'Y' + N'Z' = 0$ $\qquad L''X'' + M''Y'' + N''Z'' = 0$

on aura : $L'X'' + M'Y'' + N'Z'' + L''X' + M''Y' + N''Z'$

Cette quantité est indépendante du choix des axes, puisqu'elle est égale à $RG \cos R\hat{O}G$. On pourra donc prendre pour origine un p. de F, B par ex. et pour plan des xy le plan BB'Φ ; on trouvera que l'expression précédente

est égal à 6 fois le volume du tétraèdre $BB'\Phi\Gamma$, pris avec un certain signe.
— Nous allons maintenant considérer des systèmes de vecteurs particuliers, qui ont reçu le nom de couples (cf. Statique de Poinsot.) Un couple est l'ensemble de 2 vecteurs égaux et opposés.
On appelle : bras de levier du couple la longueur de la perpendiculaire commune aux 2 vecteurs ; moment du couple, le produit du bras de levier par la longueur d'un des vecteurs ; axe du couple, un vecteur CG mené par C, milieu du bras de levier, perpendiculairement au plan du couple, égal au moment du couple, et dirigé dans un sens tel qu'un mobile qui décrit l'un des vecteurs tourne autour de CG dans le sens positif.

Un tel système n'est qu'un cas particulier des systèmes de vecteurs que nous venons d'étudier. Sa résultante générale est nulle ; donc son moment résultant est le même pour tous les points de l'espace. Ce moment est égal en grandeur et en direction à l'axe du couple : en effet, ce moment est égal à $2P.\overline{CA} = P.\overline{AB} = CG$; son sens est le même que celui de CG.
On voit qu'étant donné un couple son axe ou son moment résultant est bien déterminé ; mais si on se donne l'axe ou le moment résultant d'un couple, ce couple n'est pas entièrement déterminé par là : en effet, on ne connaît que la valeur et le signe du produit $P.\overline{AB}$, et le plan du couple ; on peut donc choisir arbitrairement un des 2 facteurs et déterminer l'autre. La position du couple dans le plan et autour de l'axe n'est pas non plus déterminée.
Tous les couples qui ont le même axe en grandeur et direction (non en position) sont équivalents.
En effet, ils ont même résultante générale et même moment résultant,

puisque le moment résultant est, en tous les points de l'espace égal à leur axe. - Il s'ensuit qu'on peut les transformer l'un dans l'autre par les 3 opérations élémentaires.

Un système quelconque de couples est toujours équivalent à un couple unique.

Soient en effet les axes G_1G_1, G_2G_2, ... G_nG_n des couples donnés. Puisque la résultante générale du système est nulle, son moment résultant est le même en tous les points de l'espace; prenons le moment de chaque couple par rapport à un point O quelconque: OG'_1, OG'_2, ... OG'_n. Le moment résultant du système est la somme géométrique des ~~moments~~ vecteurs concourants: OG'_1, OG'_2, ... OG'_n; soit OG. Imaginons un couple ayant pour axe OG: ce couple unique est équivalent au système proposé.

On peut donc composer les couples en nombre quelconque au moyen des opérations élémentaires. L'axe du couple résultant est la résultante des axes des couples composants transportés en un même point arbitraire.

Il peut arriver que OG soit nul, et ne donne conséquemment lieu à aucun couple. Le système des couples donnés est alors en équilibre, puisqu'on a: $R=0$, $G=0$. On voit qu'il se réduit à néant par la composition; autrement dit, il est équivalent à zéro.

— Théorème: Tout système de vecteurs est équivalent à un vecteur unique appliqué en un point pris à volonté et à un couple.

En effet, soit S un système de vecteurs quelconque; soit OR sa résultante générale, OG son moment résultant par rapport au point choisi O. Soit un second système S' composé de OR et d'un couple ayant pour axe OG; je dis que ce système S' est équivalent au système donné S. En effet, leur résultante générale est la même: OR; leur moment résultant est identique, car dans le 2e système S', le moment de OR par rapport à O est nul, et il reste le moment du couple par rapport à O, soit précisément OG.

Tout ce que l'on a dit de la variation du moment résultant relatif aux divers points de l'espace s'applique exactement à la variation de l'axe du couple résultant; il n'y a que le nom à changer. On trouvera ainsi que si la résultante générale n'est pas nulle, il y a un axe central du système de vecteurs; la réduction donne sur cet axe central une résultante constante et un couple dont l'axe est dirigé suivant l'axe central, dans un sens ou dans l'autre.

Certains géomètres anglais (Ball) ont nommé <u>torseur</u> le système formé par un vecteur et un couple dont l'axe coïncide avec la direction du vecteur. <u>Le point d'application</u> du torseur est celui du vecteur unique, O; <u>l'intensité du torseur</u> est la longueur OR en valeur absolue; <u>la flèche</u> du torseur est le rapport $\frac{Og}{OR}$ de l'axe du couple et du vecteur simple, pris avec son signe: Og et par suite la flèche, ~~est~~ positif ou négatif suivant qu'il est dirigé dans le même sens que OR ou en sens contraire. Ces 3 éléments définissent complètement le torseur. On voit que la flèche a pour expression analytique

$$f = \frac{G \cos \widehat{ROG}}{R}$$ car $G \cos \widehat{ROG}$ est la valeur algébrique de Og

ou: $$f = \frac{LX + MY + NZ}{X^2 + Y^2 + Z^2}$$ = valeur unique des 3 rapports qui définissent l'axe central par leur égalité

Donc: Un système de vecteurs quelconque est équivalent à un torseur dirigé suivant l'axe central du système. Le point d'application du torseur est seul indéterminé.

On peut encore démontrer le théorème précédent en partant de la réduction du système donné à 2 vecteurs dont l'un est appliqué en un point pris à volonté.

Soient les vecteurs F et Φ auxquels le système donné est équivalent, le vecteur F étant appliqué au point O arbitrairement choisi. Appliquons en O 2 vecteurs opposés. Φ' et −Φ, égaux et parallèles au vecteur Φ.

G O Φ' −Φ O' Φ R F

On peut remplacer OF et OΦ' par leur résultante OR; il reste les 2 vect. Φ et −Φ, qui forment un couple. On voit que l'axe OG de ce couple est le moment résultant du système par rapport au point O.

Dans cette réduction d'un système de vecteurs en un point, divers cas peuvent se présenter:

I. La résultante générale n'est pas nulle: $X^2+Y^2+Z^2>0$.

1°. Ou bien ~~[illegible]~~ ~~la flèche du torseur~~ le moment résultant n'est pas nul: $LX+MY+NZ \gtrless 0$ et alors le système se réduit à un torseur dirigé suivant l'axe central et dont la flèche est positive ou négative, mais différente de 0;

2°. Ou bien la flèche du torseur est nulle: $LX+MY+NZ=0$ et alors le système se réduit à un vecteur unique dirigé suivant l'axe central; en un point quelconque de l'espace, le moment résultant est perpendiculaire à la résultante générale.

II. La résultante générale est nulle: $X^2+Y^2+Z^2=0$.

1° Ou bien le moment résultant n'est pas nul: ~~$LX+MY+NZ \gtrless 0$~~ $L^2+M^2+N^2>0$. et alors le système équivaut à un ~~torseur~~ couple unique;

2° Ou bien le moment résultant est nul; ~~$LX+MY+NZ=0$~~ $L^2+M^2+N^2=0$. et alors le système est équivalent à 0, ou en équilibre. On retrouve ainsi les 6 équations de l'équilibre: $X=0$ $Y=0$ $Z=0$ $L=0$ $M=0$ $N=0$.

— Nous n'insisterons pas sur la composition de deux ou plusieurs torseurs, car nous avons traité la composition d'un nombre quelconque de vecteurs en général. Chaque torseur représentant 3 vecteurs, un système de n torseurs équivaudra à un système de $3n$ vecteurs que nous savons composer; or ~~cette~~ un tel système se réduit toujours à un torseur, donc un système de torseurs ~~est équivalent~~ à un torseur unique dirigé suivant l'axe central du système. On déterminera comme d'ordinaire cet axe central, la résultante générale et le moment résultant (ou axe du couple minimum); on aura ainsi tous les éléments du torseur résultant.

Cas particulier : Système de vecteurs parallèles à une même direction.

Menons par l'origine une demi-droite parallèle à la direction commune des vecteurs ; soient α, β, γ ses cosinus directeurs. Les vecteurs A_1P_1, A_2P_2, ... A_nP_n étant dirigés dans un sens ou dans l'autre, on considérera comme positifs ceux qui sont dirigés dans le même sens que la demi-droite $O(\alpha\beta\gamma)$ et comme négatifs ceux qui sont dirigés en sens contraire. Soient $P_1, P_2, \ldots\ldots P_n$ leurs intensités respectives prises avec leur signe ; on aura leurs projections avec leur signe au moyen des formules :

$$X_i = \alpha P_i \qquad Y_i = \beta P_i \qquad Z_i = \gamma P_i$$

La résultante générale du système au point O aura pour projections :

$$X = \Sigma X_i = \alpha \Sigma P_i \qquad Y = \beta \Sigma P_i \qquad Z = \gamma \Sigma P_i$$

Cette résultante est dirigée suivant la droite (α, β, γ) et elle est égale à la somme algébrique des intensités des vecteurs composants.

Calculons maintenant les projections du moment résultant au point O :

$$N = \Sigma (x_1 Y_1 - y_1 X_1) = \beta \Sigma P_1 x_1 - \alpha \Sigma P_1 y_1$$

$$L = \gamma \Sigma P_1 y_1 - \beta \Sigma P_1 z_1$$

$$M = \alpha \Sigma P_1 z_1 - \gamma \Sigma P_1 x_1$$

On constate aisément sur ces formules que l'on a identiquement :

$$LX + MY + NZ = 0$$

Donc le moment résultant est perpendiculaire à la résultante générale. Et en effet, le moment de A_1P_1 est perpendiculaire au plan OA_1P_1 ; le moment de A_2P_2 est perpendiculaire au plan OA_2P_2, etc. Tous ces plans se coupent suivant la droite $O(\alpha, \beta, \gamma)$; comme tous les moments sont perpendiculaires à cette droite, ils se trouvent dans le plan perpendiculaire en O à OR ; et comme leur résultante ou somme géométrique se trouve dans le même plan, elle est aussi perpendiculaire à OR.

On sait que dans ce cas (et si $OR \gtrless 0$) les équations de l'axe central sont :

$$L - y'Z + z'Y = 0 \qquad M = z'X + x'Z = 0 \qquad N - x'Y + y'X = 0$$

c. à d. : $\beta \Sigma P_1 x_1 - \alpha \Sigma P_1 y_1 - \beta x' \Sigma P_1 + \alpha y' \Sigma P_1 = 0$ ou bien :

$$\beta \left[\Sigma P_1 x_1 - x' \Sigma P_1\right] - \alpha \left[\Sigma P_1 y_1 - y' \Sigma P_1\right]$$ et de même pour les autres.

On a donc : $$\frac{\Sigma P_1 x_1 - x' \Sigma P_1}{\alpha} = \frac{\Sigma P_1 y_1 - y' \Sigma P_1}{\beta} = \frac{\Sigma P_1 z_1 - z' \Sigma P_1}{\gamma}$$

Ces équations de l'axe central montrent qu'il est parallèle, comme on pouvait s'y attendre, à la direction (α, β, γ) des vecteurs composants.

Elles montrent de plus que, quelle que soit cette direction commune des vecteurs, l'axe central passe toujours par le point fixe dont les coordonnées sont : $$x' = \frac{\Sigma P_1 x_1}{\Sigma P_1} \qquad y' = \frac{\Sigma P_1 y_1}{\Sigma P_1} \qquad z' = \frac{\Sigma P_1 z_1}{\Sigma P_1}$$

Ce point particulier O' est dit le centre des forces parallèles $P_1, P_2, \dots P_n$.

Il ne dépend que de la position des points d'application $A_1, A_2, \dots A_n$, et des intensités relatives des forces : car les expressions de x', y', z' sont homogènes du degré 0 en $P_1, P_2, \dots P_n$.

On peut réduire le système donné à un vecteur unique $O'R'$ ($= \Sigma P_1$) appliqué en O'.

Donc : Un système de vecteurs parallèles (à la condition : $\Sigma P_1 \gtrless 0$) est équivalent à un vecteur unique parallèle à leur direction commune, égal à leur somme algébrique et appliqué au centre des forces parallèles du syst.

— Il est clair que si l'on fait tourner tous les vecteurs composants autour de leurs points d'application sans qu'ils cessent d'être parallèles, le vecteur résultant tourne autour de O' en leur restant parallèle.

— En appliquant les conclusions précédentes au cas particulier de 2 forces parallèles on voit que leur résultante est égale à leur somme algébrique et appliquée au point O' qui partage la droite qui joint leurs points

A O' B P P' R

d'application en raison inverse de leurs intensités (prises avec leur signe)

Dans tout ce qui précède, nous avons supposé : $\Sigma P_1 \gtrless 0$.

Examinons maintenant le cas particulier où : $\Sigma P_1 = 0$.

La résultante générale en un point quelconque est nulle et le moment résultant est OG perpendiculaire à la direction (α, β, γ) Donc le système est équivalent au couple dont l'axe serait OG.

Si en même temps le moment résultant est nul $(L = M = N = 0)$ il y a équilibre. Les conditions de l'équilibre pour un système de vecteurs parallèles se réduisent à 3 : $\Sigma P_1 = 0 \qquad \dfrac{\Sigma P_1 x_1}{\alpha} = \dfrac{\Sigma P_1 y_1}{\beta} = \dfrac{\Sigma P_1 z_1}{\gamma}$

Dans le cas tout particulier où l'on a :

$$\Sigma P_1 = 0 \qquad \Sigma P_1 x_1 = 0 \qquad \Sigma P_1 y_1 = 0 \qquad \Sigma P_1 z_1 = 0$$

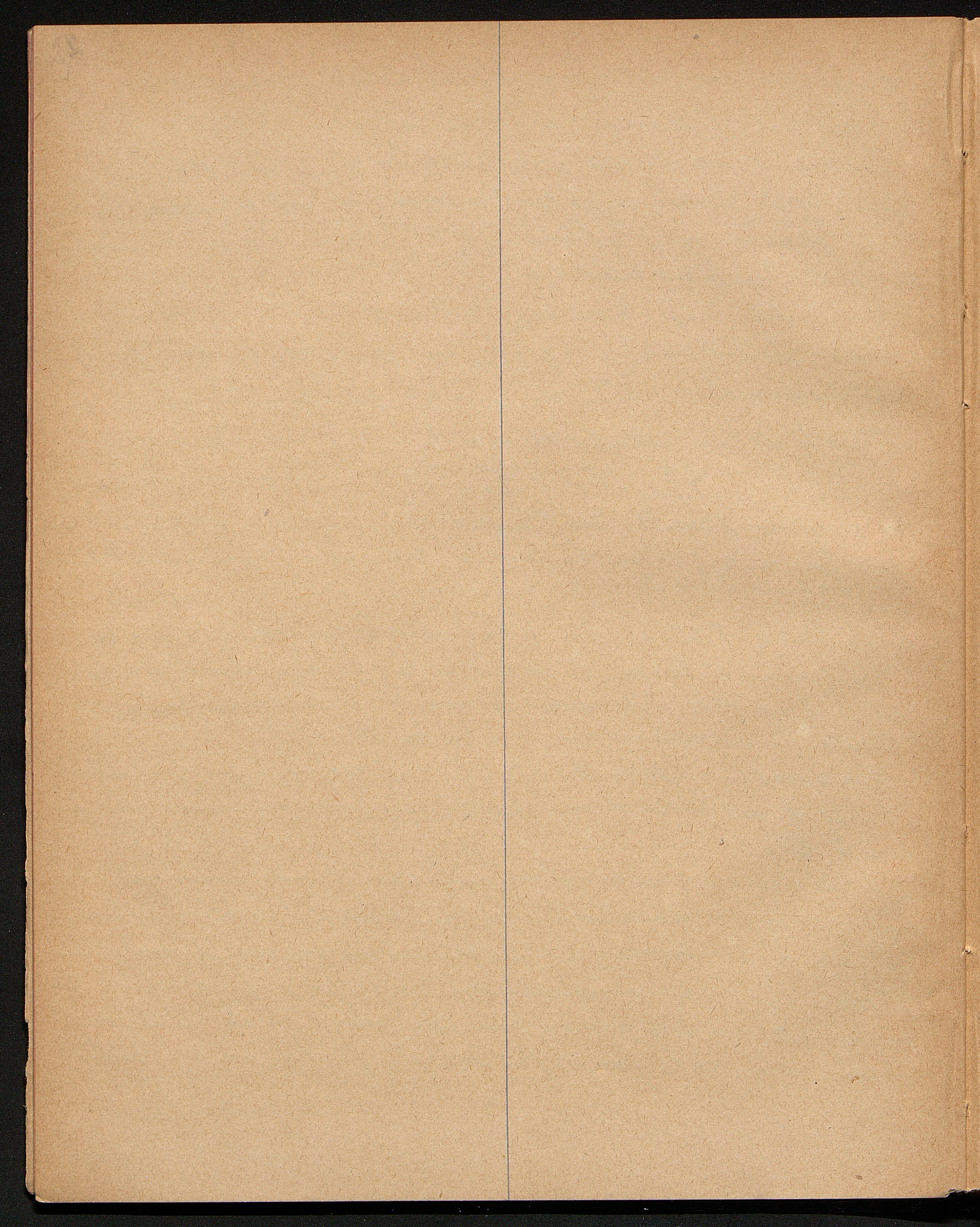
les conditions d'équilibre sont remplies quels que soient α, β, γ ; c.à.d. qu'on peut faire varier à volonté la direction commune des vecteurs sans détruire l'équilibre.

On pourra, à titre d'exercices, démontrer les propositions suivantes :

- Un système quelconque de vecteurs est toujours équivalent à 6 vecteurs dirigés suivant les arêtes d'un tétraèdre (On décompose chacun des vecteurs donnés suivant les 6 arêtes du tétraèdre.)

- La quantité : $(LX + MY + NZ)$ est égale à 6 fois la somme des volumes de tous les tétraèdres construits sur les vecteurs donnés associés deux à deux.

- Dans un système de vecteurs quelconque, il existe une infinité de droites par rapport auxquelles le moment résultant du système est nul (Droites de moment nul.) – Elles forment un complexe de droites du 1er ordre ; c.à.d. celles de ces droites qui passent par un point engendrent un plan ; celles qui sont dans un même plan passent par un même point. Ce point est le foyer du plan ; ce plan est le plan focal du point (Chasles.)



Cinématique

La cinématique étudie les mouvements des corps dans leur rapport avec le temps. Cette science est en quelque sorte intermédiaire entre la géométrie et la mécanique rationnelle (statique et dynamique). Ce qui distingue la cinématique de la géométrie (où l'on considère aussi les mouvements des figures) c'est la notion de temps ; ce qui distingue la mécanique de la cinématique c'est la notion de force.

Tous les mouvements que nous connaissons sont relatifs, et on ne peut jamais constater de mouvement absolu. On peut cependant concevoir un système d'axes absolument fixes, et étudier le mouvement absolu des corps par rapport à ces 3 axes. Cette abstraction nous permet de simplifier les problèmes de la cinématique ; c'est pourquoi nous étudierons le mouvement absolu avant les mouvements relatifs.

Soit un point M qui se meut, c.à.d. dont les coordonnées x, y, z sont fonction du temps t. Le temps, qui joue ici le rôle de variable indépendante, ne se définit pas ; il se mesure par une horloge, et se compte par secondes, positivement ou négativement suivant qu'il est postérieur ou antérieur à l'instant origine à partir duquel on le compte.

Le mouvement du point est complètement défini par les 3 équations :

$$x = \varphi(t) \qquad y = \psi(t) \qquad z = \varpi(t)$$

Il suffit d'éliminer t entre ces 3 équations pour avoir les 2 équations de la trajectoire, c.à.d. de la courbe engendrée par le point en se mouvant.

– On peut aussi définir le mouvement du point en se donnant sa trajectoire, et un point A fixe sur cette courbe, à partir duquel on comptera la longueur de l'arc variable $AM = s$, positivement dans un sens, négativement dans l'autre : cet arc sera une fonction du temps, et le mouvement du p[oin]t M sera complètement déterminé quand on connaîtra la relation :

$$s = f(t)$$

Quand la trajectoire est droite, le mouvement est dit rectiligne.
Si l'on prend cette droite pour axe des x, les 2 représentations que nous venons de définir se confondent : l'abscisse x est en même temps le segment s de la trajectoire.

On dit que le mouvement rectiligne est uniforme quand l'abscisse est une fonction linéaire du temps : $x = at + b$

Il en résulte immédiatement que l'accroissement de l'abscisse est proportionnel à l'accroissement du temps : $\Delta x = a \Delta t$
ou que l'espace parcouru est proportionnel au temps employé à le parcourir.
On en tire : $\frac{\Delta x}{\Delta t} = a = const^{e}$

Réciproquement, si le rapport $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ est constant, le mouv^{t} est uniforme.

Définition de la vitesse. Soit M la position du mobile à l'époque t, M_1 sa position à l'instant $(t + \Delta t)$. En prenant la longueur MM_1 avec son signe, elle est égale à Δx. Portons à partir de M dans le sens MM_1 un segment MW ayant pour longueur $\frac{\Delta x}{\Delta t}$; il aura aussi pour valeur algébrique $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, qui est une quantité constante par hypothèse ; ce vecteur constant MW est par définition la vitesse du mouvement uniforme considéré.

Définissons maintenant la vitesse d'un mobile qui décrit une courbe quelconque suivant un mouvement quelconque. Soient x, y, z les coordonnées du point M, données en fonction de t ; à l'instant $(t + \Delta t)$, ces coordonnées seront : $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$, et le mobile sera au p^{t} M_1 correspondant. Le segment rectiligne MM_1 a pour projections : $\Delta x, \Delta y, \Delta z$.
Portons sur la direction MM_1 dans le sens MM_1 une longueur MW égale à $\frac{MM_1}{\Delta t}$; c'est ce qu'on nomme la vitesse moyenne du mobile pendant le

temps Δt : c'est manifestement la vitesse d'un mobile fictif qui parcourrait d'un mouvement uniforme la corde MM_1 pendant que le mobile réel parcourt l'arc MM_1. — Les projections de MW sont évidemment :

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad \frac{\Delta y}{\Delta t}, \quad \frac{\Delta z}{\Delta t}.$$

On appelle vitesse du mobile à l'instant t la limite de la vitesse moyenne quand l'intervalle Δt tend vers 0. La sécante MM_1 devient alors la tangente en M, et MW tend vers le segment MV porté sur la tangente ; ce segment MV est la vitesse à l'instant t ; il a d'ailleurs pour projections :

$$\frac{dx}{dt} \quad \frac{dy}{dt} \quad \frac{dz}{dt} \quad \text{ou} \quad \varphi'(t) \quad \psi'(t) \quad \varpi'(t)$$

Dans le 2e mode de représentation, où le mouvement est défini par la trajectoire et par l'équation : $s = f(t)$

on mènera la tangente MT dans le sens des arcs croissants ; la vitesse sera dirigée suivant cette tangente (dans un sens ou dans l'autre) et la valeur algébrique de cette vitesse sera : $v = \frac{ds}{dt}$.

En effet, soient α, β, γ les cosinus directeurs de la tangente MT ; on sait que : $\alpha = \frac{dx}{ds}$ $\beta = \frac{dy}{ds}$ $\gamma = \frac{dz}{ds}$.

On en déduit : $\frac{dx}{dt} = \alpha \frac{ds}{dt}$ $\frac{dy}{dt} = \beta \frac{ds}{dt}$ $\frac{dz}{dt} = \gamma \frac{ds}{dt}$

égalités qui prouvent que MV est égale à la longueur $\frac{ds}{dt}$ portée avec son signe sur la direction MT (considérée comme positive dans le sens MT.)

Définition de l'accélération

A l'époque t, le mobile est en M avec la vitesse MV ; à l'instant $(t + \Delta t)$ il est en M_1 avec la vitesse M_1V_1. Les projections de celle-ci sont :

$$\frac{dx}{dt} + \Delta\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} + \Delta\frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt} + \Delta\frac{dz}{dt}.$$

Menons par M un segment égal et parallèle à M_1V_1, soit MV. Construisons MH, différence géométrique de MV et MV. Le segment MH a pour projections : $\Delta\frac{dx}{dt}$, $\Delta\frac{dy}{dt}$, $\Delta\frac{dz}{dt}$.

fig. fausse (v. p. 65.)

Sur la direction MH dans le sens MH portons une longueur MI égale à $\frac{MH}{\Delta t}$. MI est appelé l'accélération moyenne pendant le temps Δt. Ses projections sont évidemment :
$$\frac{\Delta\frac{dx}{dt}}{\Delta t},\quad \frac{\Delta\frac{dy}{dt}}{\Delta t},\quad \frac{\Delta\frac{dz}{dt}}{\Delta t}.$$

On appelle accélération du mobile à l'instant t, la limite de l'accélération moyenne quand l'intervalle Δt tend vers 0. Le segment MI tend alors vers un vecteur MJ, dont les projections sont les limites des projections de MI :
$$\frac{d^2x}{dt^2} \quad \frac{d^2y}{dt^2} \quad \frac{d^2z}{dt^2} \quad \text{ou} \quad \varphi''(t) \quad \psi''(t) \quad \varpi''(t).$$

On pourrait de même, en considérant les accélérations MJ, M_1J_1 en 2 points voisins de la trajectoire, et en répétant sur elles les constructions précédentes, définir une accélération du 2e ordre, dont les projections seraient égales aux dérivées 3es de x, y, z, et ainsi de suite. Mais ces accélérations successives n'ont aucun intérêt, car elles n'interviennent pas dans les formules de la mécanique.

Dans le 2e mode de représentation, où la courbe trajectoire étant connue on donne $s = f(t)$, menons MT tangente en M dans le sens des arcs positifs ; soient α, β, γ ses cosinus directeurs. Menons la normale principale en M dirigée vers le centre de courbure ; soit MC dont les cosinus directeurs sont $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; enfin menons la binormale MB,

normale en M au plan osculateur CMT. — Pour définir l'accélération au point M, il suffit de ~~projeter~~ connaître les projections du vecteur MJ sur les 3 axes rectangulaires MT, MC, MB. Nous allons voir que l'accélération est dans le plan osculateur, de sorte que sa projection sur MB est nulle, et qu'il suffit de calculer ses projections J_T, J_N sur MT et MC.

On sait qu'on a: $\alpha = \frac{dx}{ds}$ $\beta = \frac{dy}{ds}$ $\gamma = \frac{dz}{ds}$

Rappelons les formules de Serret pour les courbes gauches:

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha_1}{\rho} \qquad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\beta_1}{\rho} \qquad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\gamma_1}{\rho}$$

On aura donc: $\frac{dx}{dt} = \alpha \frac{ds}{dt}$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \alpha \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{\alpha_1}{\rho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

On aura de même:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \beta \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{\beta_1}{\rho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \gamma \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{\gamma_1}{\rho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

L'interprétation de ces formules est immédiate: les 1ers membres de ces égalités sont les projections de J sur les 3 axes Oxyz; les 2es membres sont les sommes des projections correspondantes de J_T et de J_N. On voit que J est la somme géométrique du segment $\frac{d^2s}{dt^2}$ porté sur MT, et du segment $\frac{1}{\rho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ porté sur MN; donc:

$$J_T = \frac{d^2s}{dt^2} \qquad J_N = \frac{1}{\rho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \qquad J_B = 0.$$

On a prouvé par là même que J est dans le plan osculateur — Nous supposons dans la figure que $J_T = \frac{d^2s}{dt^2}$ est positif, donc dirigé dans le sens MT; si $\frac{d^2s}{dt^2}$ était négatif, J_T serait porté dans l'autre sens

Quant au segment $J_N = \frac{1}{\rho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$, il est essentiellement positif; donc l'accélération est toujours tournée vers la concavité de la courbe.

On peut exprimer les projections de l'accélération en fonction de $v = \frac{ds}{dt}$:

$$J_T = \frac{dv}{dt} \qquad J_N = \frac{v^2}{\rho}$$

On voit que si J_N est constamment nul, v étant différent de 0 par hypothèse, il faut que le rayon de courbure soit constamment infini & la trajectoire est une droite. — Toute trajectoire où la composante normale de l'accélération est nulle est rectiligne.

Pour que J_T soit nulle, il faut et il suffit qu'on ait: $\frac{dv}{dt} = 0$, $v = \text{Const.} = v_0$.

Le mouvement est alors uniforme: $s = v_0 t + c$

Il ne reste dans ce cas que l'accélération normale, qui, v étant constante, est en raison inverse du rayon de courbure; l'accélération J est d'ailleurs dirigée suivant la normale. Donc, quand un point décrit un cercle avec une vitesse constante, l'accélération est constante et passe par le centre.

— Passons à l'étude du mouvement d'un corps solide.

On appelle corps solide un ensemble de points invariablement liés entre eux.

On distingue 2 sortes de mouvements dans les corps solides; la translation et la rotation.

Un corps est animé d'un mouvement de translation quand il se déplace de telle manière que les segments qui joignent ses points deux à deux restent parallèles à eux-mêmes pendant le mouvement.

Pour que cela ait lieu, il suffit que le trièdre A(BCD), obtenu en joignant un point du corps A à 3 autres points BCD non situés dans un même plan, se déplace parallèlement à lui-même.

Dans le mouvement de translation, tous les points du corps ont des vitesses égales et parallèles. — Soient par ex. 2 points $A_1(x_1 y_1 z_1)$ et $A_2(x_2 y_2 z_2)$

les projections du segment A_1A_2 sont : $(x_2 - x_1)$ $(y_2 - y_1)$ $(z_2 - z_1)$
elles sont constantes par définition ; donc leurs dérivées sont nulles :

$$\frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_1}{dt} = 0 \qquad \frac{dy_2}{dt} - \frac{dy_1}{dt} = 0 \qquad \frac{dz_2}{dt} - \frac{dz_1}{dt} = 0$$

ces égalités expriment que les 2 points ont mêmes vitesses.

Réciproquement, si un corps se meut pendant un certain temps de façon que tous ses points aient la même vitesse, il est animé d'un mouvement de translation. Il suffit de faire le calcul inverse du précédent de l'égalité des dérivées :

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{dx_1}{dt} \qquad \frac{dy_2}{dt} = \frac{dy_1}{dt} \qquad \frac{dz_2}{dt} = \frac{dz_1}{dt}$$

on conclura, en intégrant, la constance des projections :

$$(x_2 - x_1) \qquad (y_2 - y_1) \qquad (z_2 - z_1)$$

d'où il suit que le segment A_1A_2 se déplace parallèlement à lui-même. Cela étant vrai de tous les segments analogues, le mouvement est bien une translation.

La valeur commune des vitesses de tous les points du corps est la vitesse de translation ou par abréviation la translation du corps.

Dans un mouvement de translation, tous les points ont la même accélération : car de l'égalité des dérivées premières résulte celle des dérivées secondes. Mais la réciproque n'est pas vraie : car si les dérivées secondes sont égales, les dérivées premières ne sont égales qu'à une constante près, qui donnera lieu, en intégrant, à un terme du 1er degré en t, différent suivant les points.

Le mouvement de rotation est celui d'un corps solide dans lequel tous les points d'une certaine droite restent immobiles. Pour que cela ait lieu, il suffit de rendre fixes 2 points de cette droite, qu'on nomme axe de rotation.

Pour connaître le mouvement, c.à.d pour définir la position du corps à l'instant t, il suffit de se donner l'angle θ dont il a tourné autour de l'axe à partir d'~~une~~ sa position initiale pour $t = 0$ (à l'instant origine)

Cet angle est une certaine fonction du temps : $\theta = f(t)$

Chaque point du corps décrit un cercle dont le plan est perpendiculaire à l'axe et dont le centre est sur l'axe. Dans le laps de temps Δt, le point M tourne de $\Delta\theta$; le point M_1 tourne aussi de $\Delta\theta$. Pour avoir la vitesse moyenne de ces 2 points on aura joindre MM', $M_1M'_1$, et diviser ces segments de droites par Δt. La vitesse des p. M et M_1 sera la limite de ces vitesses moyennes. On voit aussi que la vitesse du p. M est tangente au cercle qu'il décrit ; elle est perpendiculaire au plan MXY, car elle est à la fois perpendiculaire à l'axe XY et au rayon MP. Or on a : $\frac{\text{arc } MM'}{MP} = \frac{\text{arc } M_1M'_1}{M_1P_1} = \Delta\theta$

d'où : $$\frac{\frac{\text{arc } MM'}{\Delta t}}{MP} = \frac{\frac{\text{arc } M_1M'_1}{\Delta t}}{M_1P_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Faisons tendre $\Delta\theta$ et Δt vers zéro : $\frac{\text{arc } MM'}{\Delta t}$ a pour limite la vitesse du p. M, $\frac{\text{arc } M_1M'_1}{\Delta t}$ a pour limite la vitesse du p. M_1. Donc on a à l'instant t : $$\frac{V}{MP} = \frac{V_1}{M_1P_1} = \cdots\cdots = \frac{d\theta}{dt} = \omega$$

La dérivée ω se nomme la <u>vitesse angulaire</u> du corps à l'instant t. On voit que la vitesse de chaque point est proportionnelle à sa distance à l'axe.

$$V = \omega . \overline{MP} \qquad V_1 = \omega . M_1P_1$$

Elle est égale à ω pour tous les points situés à la distance 1 de l'axe ; donc la vitesse angulaire d'un corps est égale à la vitesse de ses points distants de l'axe de l'unité de longueur.

Quand on a la relation : $\theta = at + b$, $\omega = a$ = constante.

La vitesse angulaire étant constante, on dit que le mouvement de rotation est <u>uniforme</u>.

Une rotation est définie quand on en connaît l'axe, la grandeur (ou vitesse angulaire) et le sens. Prenons sur XY un point quelconque A ; portons sur l'axe un vecteur $A\omega$ égal à ω en valeur absolue, dans un sens tel que la rotation se fasse dans le sens positif autour de ce vecteur $A\omega$. Ce vecteur représente donc complètement la rotation.

— Étant donné un corps animé d'une rotation déterminée $A\omega$, trouver la vitesse du point $M(x, y, z)$ à un instant donné.

Supposons la rotation $A\omega$ donnée par les coordonnées (x_1, y_1, z_1) du point A, et par les projections du segment $A\omega$ sur les 3 axes (p, q, r).

La vitesse du point M est un vecteur MV perpendiculaire au plan $MA\omega$, égal au produit de la vitesse angulaire par la distance de M à l'axe :

$V = \omega . \overline{MP}$ et dirigé dans le sens positif de rotation autour de $A\omega$. Or le vecteur $A\omega$ est réciproquement dirigé dans le sens positif de rotation autour de MV. Donc le vecteur MV n'est autre que le <u>moment</u> du vecteur $A\omega$ par rapport au point M.

Pour connaître la vitesse du p. M, il suffit de calculer les projections de ce moment. Prenons M pour origine et menons par M 3 axes $(x'y'z')$ respectivement parallèles aux axes donnés ; les coordonnées du p. A seront dans le nouveau système : $(x_1 - x)$ $(y_1 - y)$ $(z_1 - z)$

La projection du moment du vecteur $A\omega$ par rapport à M sur l'axe des z est ~~La project~~ le moment de $A\omega$ par rapport à Mz', soit V_z :

$$V_z = x'Y_1 - y'X_1 = (x_1 - x) q - (y_1 - y) p$$

On a de même

$$V_x = (y_1 - y) r - (z_1 - z) q$$
$$V_y = (z_1 - z) p - (x_1 - x) r$$

Telles sont les projections du vecteur MV sur les 3 axes. Il serait facile d'en déduire, par la différentiation, celles de l'accélération du point M.

Supposons que l'axe de rotation passe par l'origine : on pourra prendre pour A l'origine elle-même ; alors $x_1 y_1 z_1$ seront nuls, et on aura

pour les projections de la vitesse du point M:

$$\begin{cases} V_x = qz - ry \\ V_y = rx - pz \\ V_z = py - qx \end{cases}$$

Ces formules trouvent leur application la plus intéressante dans le problème de la composition des rotations. Mais auparavant il nous faut établir un théorème concernant le mouvement relatif.

Soient 3 axes fixes $O_1 x_1 y_1 z_1$, et 3 axes $Oxyz$ ayant même disposition et animés d'un mouvement connu; on le définira en se donnant les coordonnées $(x_0 y_0 z_0)$ du point O en fonction du temps, et les 9 cosinus directeurs des 3 axes mobiles dans le système des 3 axes fixes:

Ces 9 cosinus sont liés par 6 relations de la forme

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$
$$\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 = 0$$

de sorte qu'il n'y a parmi eux que 3 paramètres indépendants.

	x	y	z
x_1	α	α_1	α_2
y_1	β	β_1	β_2
z_1	γ	γ_1	γ_2

Soit un point M en mouvement dans le système d'axes fixes $O_1 x_1 y_1 z_1$; son mouvement absolu sera défini par ses coordonnées en fonction du temps: $x_1 = \varphi_1(t)$ $\quad y_1 = \psi_1(t)$ $\quad z_1 = \varpi_1(t)$

On aura sa trajectoire absolue I_1 en éliminant le temps entre ces 3 éq.

Les projections de sa vitesse absolue V_A sur les 3 axes fixes seront:

$$\frac{dx_1}{dt}, \quad \frac{dy_1}{dt}, \quad \frac{dz_1}{dt} \quad \text{ou} \quad \varphi_1'(t) \quad \psi_1'(t) \quad \varpi_1'(t)$$

Soient $(x\, y\, z)$ les coordonnées du même point M dans le système d'axes mobiles $Oxyz$; elles sont liées aux coordonnées $x_1\, y_1\, z_1$ par les formules

de transformation :
$$\begin{cases} x_1 = x_0 + \alpha x + \alpha_1 y + \alpha_2 z \\ y_1 = y_0 + \beta x + \beta_1 y + \beta_2 z \\ z_1 = z_0 + \gamma x + \gamma_1 y + \gamma_2 z \end{cases}$$

Si on les résout par rapport à x, y, z, en tenant compte des relations qui lient les cosinus, on a les formules inverses de transformation :

$$\begin{cases} x = \alpha(x_1 - x_0) + \beta(y_1 - y_0) + \gamma(z_1 - z_0) \\ y = \alpha_1(x_1 - x_0) + \beta_1(y_1 - y_0) + \gamma_1(z_1 - z_0) \\ z = \alpha_2(x_1 - x_0) + \beta_2(y_1 - y_0) + \gamma_2(z_1 - z_0) \end{cases}$$

On aura ainsi x, y, z en fonction du temps, et les 3 équations :

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \varpi(t) \end{cases}$$

définissent le mouvement relatif du point M dans le système des axes mobiles. Sa trajectoire relative T dans le système $Oxyz$ s'obtiendra en éliminant le temps entre les 3 équations précédentes. Les projections de sa vitesse relative V_R sur les axes mobiles seront : $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$.

D'autre part, ses projections sur les axes fixes seront, en vertu des formules de transformation :

$$\alpha \frac{dx}{dt} + \alpha_1 \frac{dy}{dt} + \alpha_2 \frac{dz}{dt}$$

$$\beta \frac{dx}{dt} + \beta_1 \frac{dy}{dt} + \beta_2 \frac{dz}{dt}$$

$$\gamma \frac{dx}{dt} + \gamma_1 \frac{dy}{dt} + \gamma_2 \frac{dz}{dt}$$

ce qui ~~montre~~ exprime que la vitesse V_R est dans l'espace la résultante de 3 vecteurs parallèles aux axes $Oxyz$ et égaux à $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$.

– Outre la vitesse absolue et la vitesse relative, définissons la vitesse d'entraînement ; c'est la vitesse absolue qu'aurait le point M si dans sa position actuelle il ~~de~~ était invariablement lié aux axes mobiles (s'il devenait immo-

bile dans le système Oxyz) c'est encore, si l'on veut, la vitesse absolue du point géométrique du système mobile avec lequel le p M coïncide à l'instant t ; nous la désignerons par V_E.

Calculons maintenant les projections de V_A sur les 3 axes fixes en différentiant les formules de transformation qui donnent x_1, y_1, z_1 :

$$\frac{dx_1}{dt} = \left[\alpha \frac{dx}{dt} + \alpha_1 \frac{dy}{dt} + \alpha_2 \frac{dz}{dt}\right] + \left[\frac{dx_0}{dt} + x\frac{d\alpha}{dt} + y\frac{d\alpha_1}{dt} + z\frac{d\alpha_2}{dt}\right]$$

$$\frac{dy_1}{dt} = \left[\beta \frac{dx}{dt} + \beta_1 \frac{dy}{dt} + \beta_2 \frac{dz}{dt}\right] + \left[\frac{dy_0}{dt} + x\frac{d\beta}{dt} + y\frac{d\beta_1}{dt} + z\frac{d\beta_2}{dt}\right]$$

$$\frac{dz_1}{dt} = \left[\gamma \frac{dx}{dt} + \gamma_1 \frac{dy}{dt} + \gamma_2 \frac{dz}{dt}\right] + \left[\frac{dz_0}{dt} + x\frac{d\gamma}{dt} + y\frac{d\gamma_1}{dt} + z\frac{d\gamma_2}{dt}\right]$$

Ces égalités expriment le théorème suivant :

Dans l'espace, la vitesse absolue est la somme géométrique de la vitesse relative et de la vitesse d'entraînement. $(V_A) = (V_R) + (V_E)$

En effet, les projections de V_A sont la somme algébrique des projections correspondantes de V_R et de V_E. Chacune des projections de V_A forme le 1er membre des égalités précédentes ; la 1e partie du 2e membre est la projection de V_R, comme nous l'avons vu plus haut ; quant à la 2e partie c'est la projection de V_E, puisque c'est à quoi se réduit la projection de V_A quand le point M devient immobile dans le système Oxyz ; car alors $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ deviennent nulles.

Pour les accélérations on aurait un théorème analogue, mais plus compliqué, car il s'introduit un 3e groupe qui correspond à une quantité que nous étudierons bientôt (v. théorème de Coriolis, pag. 47).

— Problème de la composition des rotations.

Imaginons un corps solide C animé d'une rotation $A_1\omega_1$. En tournant il entraîne un axe $A_2\omega_2$, autour duquel tourne un corps C' de telle sorte que le segment $A_2\omega_2$ représente sa rotation relative au corps C. On demande

quelle est à chaque instant la vitesse absolue d'un point du corps C'.
Soit M un point de ce corps dont on cherche la vitesse à un instant donné.
On a pour ce point, à cet instant, l'égalité : $(V_A) = (V_R) + (V_E)$
Or sa vitesse relative est perpendiculaire au plan $MA_2\omega_2$; c'est le moment du vecteur $A_2\omega_2$ par rapport au point M.

La vitesse d'entraînement serait celle qu'il posséderait s'il était lié au corps C et tournait avec lui autour de $A_1\omega_1$. Cette vitesse est le moment du vecteur $A_1\omega_1$ par rapport au point M. La vitesse absolue est la résultante de ces 2 moments, càd. le moment résultant des 2 vecteurs $A_1\omega_1$, $A_2\omega_2$ par rapport à M.
Il suffit donc pour avoir la vitesse absolue de ce point, de prendre le moment résultant des 2 rotations par rapport au point M.

Il s'ensuit que l'ordre des 2 rotations est indifférent pour la vitesse absolue du p. M : càd. qu'on pourrait aussi bien le concevoir lié à un corps C_1' qui tournerait autour de $A_1\omega_1$, cet axe étant lui-même entraîné par le corps C_1 autour de $A_2\omega_2$.

Appliquons ce théorème à quelques cas particuliers.
Soient 2 <u>rotations concourantes</u> : $A\omega_1$, $A\omega_2$; leur moment résultant par rapport à un p. M quelconque est le moment par rapport au même point de leur résultante, càd. de la diagonale du parallélogramme $A\omega_1\omega_2$ soit $A\omega$. Ainsi la vitesse absolue du point M est la même que s'il était animé de la rotation unique $A\omega$; on peut donc composer 2 et plus généralement plusieurs rotations concourantes en une seule ; la rotation résultante sera la somme géométrique des rotations concourantes.

~~Un système quelconque de vecteurs~~ Cas des <u>rotations parallèles</u>.
Un système quelconque de vecteurs parallèles dont la somme algébrique n'est pas nulle (cette condition exclut le cas des couples) est équivalent à un vecteur égal à cette somme, parallèle à la direction commune et appliqué au centre

des forces parallèles ; donc, par définition, le moment résultant de ce système est égal au moment du vecteur résultant par rapport à un point quelconque. Appliquons ce théorème aux rotations : la vitesse du point M soumis aux rotations $A_1 \omega_1$, $A_2 \omega_2$, ... est égale à la vitesse qu'il posséderait s'il était (parallèles) animé d'une rotation unique représentée par $A\omega$, vecteur résultant des vecteurs parallèles $A_1 \omega_1$, $A_2 \omega_2$, ... On peut donc composer, pour avoir la vitesse d'un point, les rotations parallèles comme un système quelconque de vecteurs parallèles, et les réduire à une seule rotation.

– Cas de 2 rotations égales et opposées (formant un couple). La vitesse absolue du point M est, comme toujours égale au moment résultant des 2 vecteurs par rapport au point M ; or ce moment résultant est le même pour tous les points, et constamment égal à l'axe du couple ; donc puisque tout point du corps est animé d'une vitesse égale à cet axe, les vitesses de ses points sont les mêmes que s'il était soumis à une translation égale à cet axe de couple.

– Enfin, si les 2 rotations sont égales et directement opposées, leur moment résultant étant nul la vitesse de tous les points du corps est nulle, et le corps est en repos.

On peut ainsi composer un nombre quelconque de rotations situées dans l'espace, en imaginant autant de corps tournant autour d'un des axes et entraînant le axe suivant. Le problème consiste à trouver la vitesse d'un point quelconque du dernier corps ; on ~~sait~~ verra que cette vitesse est égale au moment résultant de toutes les rotations données par rapport au point M.

– On pourra appliquer aux rotations toutes les conclusions de la théorie des vecteurs ; par exemple :

Si on remplace un système de rotations par un système équivalent, la vitesse du point M ne sera pas changée.

Tout système de rotations peut se remplacer par 2 rotations dont l'une passe par un point pris à volonté.

Tout système de rotations peut se réduire à une rotation unique passant

par un point arbitrairement choisi et à un couple de rotations.

Or nous avons vu que, pour la vitesse du point M, un couple de rotations équivaut à une translation; donc:

Un système quelconque de rotations équivaut à une rotation et à une translation la rotation passant par un point choisi à volonté.

Si l'on change le point par rapport auquel la réduction est faite la rotation ne change pas; la translation change en grandeur et direction, mais sa projection sur la rotation reste constante.

Si la rotation n'est pas nulle il y aura un axe central du système de rotations donné. Sur cet axe l'axe de rotation OR et la vitesse de translation Og coïncident en direction. Donc:

Un système quelconque de rotations peut être remplacé par une rotation autour de son axe central et par une translation le long de l'axe central. L'ensemble de ces 2 mouvements de translation et de rotation ayant même direction se nomme mouvement hélicoïdal

Dans le cas particulier où la translation est nulle (Og = 0) c.à.d. si le moment résultant (OG) en un point quelconque est perpendiculaire à la résultante générale (qui représente une rotation), toutes les rotations peuvent se réduire à cette rotation unique autour de l'axe central.

Dans le cas où la résultante générale est nulle, il reste le moment résultant, c.à.d. un couple; donc toutes les rotations peuvent se réduire à une translation égale et parallèle à l'axe de ce couple.

Enfin si le système de rotations donné est équivalent à O le corps n'éprouve ni rotation ni translation: il est en repos (en équilibre).

Les théorèmes relatifs aux foyers et plans focaux prennent dans la théorie des rotations des énoncés différents qui ne changent rien au fond:

Dans chaque plan attaché au dernier corps en rotation, il existe un point dont la vitesse est normale au plan; ce point est le foyer du plan.

Le plan qui a pour foyer le point M est perpendiculaire à la vitesse absolue du point M soumis à ces n rotations combinées.

Un système quelconque de rotations et de translations peut se remplacer par une rotation et une translation. Si l'on opère cette réduction pour un point de l'axe central du système, ~~de rota~~ il se réduit à un mouvement hélicoïdal suivant cet axe.

— Nous allons maintenant démontrer cette proposition tout à fait générale. Dans le mouvement le plus général d'un corps solide, l'état des vitesses est à chaque instant le même que s'il était animé d'un mouvement hélicoïdal.

Imaginons un corps lié invariablement à des axes mobiles $Oxyz$ animés d'un mouvement connu dans le système d'axes fixes $O_1x_1y_1z_1$; Soient $(x_0\ y_0\ z_0)$ les coordonnées du point O dans ce dernier système et soient ~~les~~ cosinus directeurs des axes x, y, z par rapport aux axes x_1, y_1, z_1 ;

	x	y	z
x_1	α	α_1	α_2
y_1	β	β_1	β_2
z_1	γ	γ_1	γ_2

Ces 12 quantités sont fonctions du temps et définissent le mouvement du corps.

Soient (x, y, z) et (x_1, y_1, z_1) les coordonnées relatives et absolues d'un p. M du corps : on a les formules de transformation :

$$x_1 = x_0 + \alpha x + \alpha_1 y + \alpha_2 z$$
$$y_1 = y_0 + \beta x + \beta_1 y + \beta_2 z$$
$$z_1 = z_0 + \gamma x + \gamma_1 y + \gamma_2 z$$

Soit V la vitesse du point M. Ses projections sur les axes fixes sont :

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_0}{dt} + x\frac{d\alpha}{dt} + y\frac{d\alpha_1}{dt} + z\frac{d\alpha_2}{dt}$$
$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{dy_0}{dt} + x\frac{d\beta}{dt} + y\frac{d\beta_1}{dt} + z\frac{d\beta_2}{dt}$$
$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{dz_0}{dt} + x\frac{d\gamma}{dt} + y\frac{d\gamma_1}{dt} + z\frac{d\gamma_2}{dt}$$

x, y, z étant constantes. D'autre part, ses projections sur les axes mobiles sont :

$$V_x = \alpha \frac{dx_1}{dt} + \beta \frac{dy_1}{dt} + \gamma \frac{dz_1}{dt}$$

$$V_y = \alpha_1 \frac{dx_1}{dt} + \beta_1 \frac{dy_1}{dt} + \gamma_1 \frac{dz_1}{dt}$$

$$V_z = \alpha_2 \frac{dx_2}{dt} + \beta_2 \frac{dy_2}{dt} + \gamma_2 \frac{dz_1}{dt}$$

Calculons V_x par exemple. Son expression développée sera :

$$\left[\alpha \frac{dx_0}{dt} + \beta \frac{dy_0}{dt} + \gamma \frac{dz_0}{dt}\right] + x\left[\alpha \frac{d\alpha}{dt} + \beta \frac{d\beta}{dt} + \gamma \frac{d\gamma}{dt}\right] + y\left[\alpha \frac{d\alpha_1}{dt} + \beta \frac{d\beta_1}{dt} + \gamma \frac{d\gamma_1}{dt}\right] + z\left[\alpha \frac{d\alpha_2}{dt} + \beta \frac{d\beta_2}{dt} + \gamma \frac{d\gamma_2}{dt}\right]$$

La 1e parenthèse représente la projection de la vitesse V_0 de l'origine O sur l'axe Ox. La 2e parenthèse est nulle, car c'est la demi-dérivée de :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

La 3e parenthèse n'est pas nulle ; mais on a :

$$\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 = 0 \qquad \text{d'où, en différentiant :}$$

$$\alpha \frac{d\alpha_1}{dt} + \beta \frac{d\beta_1}{dt} + \gamma \frac{d\gamma_1}{dt} = -\left[\alpha_1 \frac{d\alpha}{dt} + \beta_1 \frac{d\beta}{dt} + \gamma_1 \frac{d\gamma}{dt}\right]$$

Représentons par $-r$ la valeur commune de ces 2 quantités, et posons de même :

$$-p = \alpha_1 \frac{d\alpha_2}{dt} + \beta_1 \frac{d\beta_2}{dt} + \gamma_1 \frac{d\gamma_2}{dt}$$

$$-q = \alpha_2 \frac{d\alpha}{dt} + \beta_2 \frac{d\beta}{dt} + \gamma_2 \frac{d\gamma}{dt}$$

On aura alors les formules simples :

$$V_x = V_{0x} - ry + qz$$

$$V_y = V_{0y} - pz + rx$$

$$V_z = V_{0z} - qx + py$$

analogues aux formules de rotation, et qu'on interprétera aisément. On

voit que si l'on mène le vecteur $O\omega$ qui a pour projections p, q, r sur les axes mobiles, la vitesse du point M est la somme géométrique de la vitesse du point O et de la vitesse que possèderait le point M dans la rotation $O\omega$. Soient les vecteurs Mv_0 et Mu représentant ces 2 vitesses, la vitesse Mv du point M sera la résultante de ces 2 vecteurs:

$$(v) = (v_0) + (u)$$

Ainsi la vitesse d'un point quelconque du corps en mouvement est la même que si le corps était animé simultanément d'une translation égale à la vitesse du point O et d'une rotation autour d'un axe passant par O.

La position du point O dans le système mobile est évidemment arbitraire; la rotation instantanée $O\omega$ est la même pour tous les points, car ses projections ne dépendent que des 9 cosinus. Au contraire, la translation change suivant les points, puisque c'est la vitesse du point choisi pour origine.

On peut ~~mettre~~ énoncer la même proposition sous d'autres formes:
La translation Ov_0 étant équivalente à 2 rotations formant un couple la distribution des vitesses est la même que si le corps était soumis à 3 rotations, dont 2 égales et opposées.

On peut, nous l'avons prouvé, remplacer le système de 3 rotations par un système équivalent, sans changer l'état des vitesses. Donc:
Les vitesses de tous les points du corps sont les mêmes que s'il était soumis à 2 rotations dont l'une appliquée en un point arbitrairement choisi.
On peut encore remplacer ce système de 3 rotations par le système d'une rotation $O\omega$ et d'un couple de rotations d'axe Ov_0, équivalent à une translation.
Si l'on fait varier le point O arbitraire, la rotation instantanée $O\omega$ reste la même en grandeur et en direction; la translation Ov_0 varie, mais sa projec-

tion sur $O\omega$ reste constante. — Il y a donc un axe central relatif à ce système : si l'on fait la réduction en un point O' de cet axe, l'axe du couple $O'v'_0$ sera constant et coïncidera en direction avec la rotation constante $O'\omega'$. La translation $O'v'_0$ sera alors minimum, et l'axe central pourra être appelé axe de translation minimum. Il est ainsi prouvé que l'état des vitesses est le même que dans le mouvement hélicoïdal défini par les vecteurs $O'v'_0$, $O'\omega'$ portés sur l'axe central.

Pour avoir les équations de l'axe central, il suffit d'écrire que le vecteur Ov est parallèle à la rotation instantanée $O\omega$, ou que :

V_x, V_y, V_z sont proportionnelles à p, q, r :

$$\frac{V_{0x} + qz - ry}{p} = \frac{V_{0y} + rx - pz}{q} = \frac{V_{0z} + py - qx}{r}$$

Tous ces rapports sont égaux à :

$$\frac{pV_{0x} + qV_{0y} + rV_{0z}}{p^2+q^2+r^2} = \frac{V_0 \cos(\omega, v_0)}{\omega}$$

On désigne quelquefois le mouvement hélicoïdal par le nom de torsion. Le point d'application, la direction et l'intensité d'une torsion sont ceux de la rotation instantanée $O'\omega'$; la flèche de la torsion est le rapport de la translation le long de l'axe instantané à la rotation instantanée :

$$f = \frac{v'_0}{\omega'} = \frac{V_0 \cos(\omega, v_0)}{\omega}.$$

On peut aussi calculer les projections sur les axes fixes de la vitesse V (V_{x_1}, V_{y_1}, V_{z_1}) et de la rotation ω (p_1, q_1, r_1) au moyen des formules :

$$p_1 = \alpha p + \alpha_1 q + \alpha_2 r \qquad V_{x_1} = \frac{dx_0}{dt} + q_1(z_1 - z_0) - r_1(y_1 - y_0)$$

$$q_1 = \beta p + \beta_1 q + \beta_2 r \qquad V_{y_1} = \frac{dy_0}{dt} + r_1(x_1 - x_0) - p_1(z_1 - z_0)$$

$$r_1 = \gamma p + \gamma_1 q + \gamma_2 r \qquad V_{z_1} = \frac{dz_0}{dt} + p_1(y_1 - y_0) - q_1(x_1 - x_0)$$

Ces dernières expriment que la vitesse absolue du point M est la somme géométrique de la vitesse du point O et de la vitesse due à la rotation absolue (p. q. r_1).

Si l'on veut avoir les équations de l'axe central de la torsion ~~instantané de rotation~~ dans le système fixe, on écrira que les projections de la vitesse absolue du point M sont proportionnelles aux projections (p. q. r_1) de la rotation instantanée sur les axes fixes.

Si l'on différentie les projections V_x. V_y. V_z. de la vitesse absolue de M, on aura les projections de l'accélération du même point sur les axes fixes.

— Mouvement fini du corps dans un laps de temps fini.

A l'instant t, les vitesses sont les mêmes en tous les points du corps que si ce corps était soumis à une torsion autour de l'axe instantané $O\omega'$; dans la suite des temps, cet axe en se déplaçant engendre dans l'espace absolu une surface réglée Σ_1; en même temps il se déplace dans le corps (c à d dans le système mobile $Oxyz$) et y engendre une surface réglée Σ. On obtiendrait l'équation de la 1e en éliminant le temps entre les équations de l'axe en coordonnées absolues (x_1, y_1, z_1) et l'équation de la 2e en éliminant le temps entre les équations de l'axe en coordonnées relatives (x, y, z). A chaque instant, les 2 surfaces réglées, l'une fixe, l'autre mobile, ont une génératrice commune, qui est l'axe instantané de torsion. On démontre que ces 2 surfaces sont tangentes le long de cette génératrice commune. On peut donc représenter le déplacement fini du corps par le roulement avec glissement de la surface Σ ~~sur la~~ surface Σ_1. (théorème de Poncelet.) Dans un laps de temps infiniment petit, le corps tourne d'un angle infiniment petit autour de l'axe instantané, et il glisse en même temps le long de cet axe d'une quantité infiniment petite.

Dans le cas particulier où le corps mobile a un point fixe on prend

le point O pour origine des axes mobiles : sa vitesse étant nulle, V_x, V_y, V_z s'annulent, et il ne reste que la vitesse due à la rotation $p\omega$. Ainsi les vitesses sont les mêmes que si le corps tournait autour d'un axe passant par le point O. Les 2 surfaces de Poncelet sont alors 2 cônes ayant pour sommet O, et le mouvement du système mobile sera représenté par le roulement sans glissement du cône mobile sur le cône fixe. On peut remarquer que tous les points équidistants du p. fixe O se trouvent sur une sphère, et que le roulement des 2 cônes l'un ~~sur~~ l'autre se réduit au roulement de 2 courbes sphériques l'une sur l'autre.

On peut concevoir que le point fixe s'éloigne à l'infini ; alors le corps est assujetti à se déplacer parallèlement à un plan fixe, c.à.d. que tous les points du corps qui se trouvent à un instant dans un plan parallèle à ce plan fixe restent dans ce plan pendant le mouvement. Supposons que le plan xOy soit assujetti à coïncider constamment avec le plan x_1Oy_1 ; le mouvement sera celui d'un corps ayant un point fixe à l'infini dans la direction Oz ou Oz_1. Il y a rotation sans translation : l'axe instantané de rotation est parallèle à Oz, Oz_1 ; il engendre donc 2 surfaces cylindriques et le mouvement peut se représenter par le roulement sans glissement de 2 cylindres l'un sur l'autre. Il suffit d'étudier le déplacement dans le plan x_1Oy_1, où il est figuré par le roulement d'une courbe mobile sur une courbe fixe.

Théorème de Coriolis relatif à la composition des accélérations dans le mouvement relatif.

On a vu (p. 36-38) que la vitesse absolue est la somme géométrique de la vitesse relative et de la vitesse d'entraînement. On va démontrer un théorème analogue touchant les accélérations, mais un peu plus compliqué : ~~la vitesse~~ l'accélération absolue est la somme géométrique de l'accélération relative, de l'accélération

d'entraînement et d'une 3e quantité qu'on sera amené à définir.
Considérons un point M qui se déplace à la fois dans le système mobile $Oxyz$ et dans le système fixe $O_1x_1y_1z_1$; ses coordonnées relatives (xyz) et ses coordonnées absolues $(x_1\,y_1\,z_1)$ sont toutes fonctions du temps.
L'accélération absolue du point M a pour projections sur les axes fixes

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} \qquad \frac{d^2y_1}{dt^2} \qquad \frac{d^2z_1}{dt^2} \qquad (J_A)$$

L'accélération relative a de même pour projections sur les axes mobiles :

$$\frac{d^2x}{dt^2} \qquad \frac{d^2y}{dt^2} \qquad \frac{d^2z}{dt^2} \qquad (J_R)$$

Les projections sur les axes fixes seront donc :

$$\alpha\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha_1\frac{d^2y}{dt^2} + \alpha_2\frac{d^2z}{dt^2}$$

$$\beta\frac{d^2x}{dt^2} + \beta_1\frac{d^2y}{dt^2} + \beta_2\frac{d^2z}{dt^2}$$

$$\gamma\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma_1\frac{d^2y}{dt^2} + \gamma_2\frac{d^2z}{dt^2}$$

L'accélération du point M, c.à.d. celle qu'il posséderait s'il était invariablement lié dans sa position actuelle au système mobile, a pour projections absolues celles de l'accélération absolue où l'on ferait x, y, z constantes ; ce sont par conséquent :

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} + x\frac{d^2\alpha}{dt^2} + y\frac{d^2\alpha_1}{dt^2} + z\frac{d^2\alpha_2}{dt^2}$$

$$\frac{d^2y_0}{dt^2} + x\frac{d^2\beta}{dt^2} + y\frac{d^2\beta_1}{dt^2} + z\frac{d^2\beta_2}{dt^2} \qquad (J_E)$$

$$\frac{d^2z_0}{dt^2} + x\frac{d^2\gamma}{dt^2} + y\frac{d^2\gamma_1}{dt^2} + z\frac{d^2\gamma_2}{dt^2}$$

Calculons maintenant les projections de l'accélération absolue en fonction de x, y, z et des 9 cosinus ; pour cela, il suffit de différentier 2 fois

les formules de transformation qui lient les coordonnées absolues aux coordonnées relatives (p. 42) :

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=\left[\alpha\frac{d^2x}{dt^2}+\alpha_1\frac{d^2y}{dt^2}+\alpha_2\frac{d^2z}{dt^2}\right]+\left[\frac{d^2x_0}{dt^2}+x\frac{d^2\alpha}{dt^2}+y\frac{d^2\alpha_1}{dt^2}+z\frac{d^2\alpha_2}{dt^2}\right]+2\left[\frac{dx}{dt}\frac{d\alpha}{dt}+\frac{dy}{dt}\frac{d\alpha_1}{dt}+\frac{dz}{dt}\frac{d\alpha_2}{dt}\right]$$

On a des expressions analogues pour $\frac{d^2y_1}{dt^2}$, $\frac{d^2z_1}{dt^2}$.

On voit que la projection de l'accélération absolue sur l'axe Ox_1 se compose de 3 groupes de termes : le 1er est la projection sur le même axe de l'accélération relative J_R ; le 2e est la projection sur le même axe de l'accélération d'entraînement J_E ; le 3e pourra être considéré comme la projection sur le même axe d'un 3e vecteur J_c qui reste à définir. — Ses projections absolues sont donc :

$$J_{cx_1}=\left(\frac{dx}{dt}\frac{d\alpha}{dt}+\frac{dy}{dt}\frac{d\alpha_1}{dt}+\frac{dz}{dt}\frac{d\alpha_2}{dt}\right)2$$

$$J_{cy_1}=\left(\frac{dx}{dt}\frac{d\beta}{dt}+\frac{dy}{dt}\frac{d\beta_1}{dt}+\frac{dz}{dt}\frac{d\beta_2}{dt}\right)2.$$

$$J_{cz_1}=\left(\frac{dx}{dt}\frac{d\gamma}{dt}+\frac{dy}{dt}\frac{d\gamma_1}{dt}+\frac{dz}{dt}\frac{d\gamma_2}{dt}\right)2$$

Pour trouver la signification géométrique de ce vecteur, cherchons ses projections relatives (dans le système $Oxyz$) :

$$J_{cx}=\alpha J_{cx_1}+\beta J_{cy_1}+\gamma J_{cz_1}$$

$$J_{cy}=\alpha_1 J_{cx_1}+\beta_1 J_{cy_1}+\gamma_1 J_{cz_1}$$

$$J_{cz}=\alpha_2 J_{cx_1}+\beta_2 J_{cy_1}+\gamma_2 J_{cz_1}$$

Si nous effectuons les calculs indiqués, on a des développements analogues à ceux de la page 43 ; l'expression de J_{cx} comprendra 3 groupes : le coefficient de $\frac{dx}{dt}$ sera nul ; celui de $\frac{dy}{dt}$ sera $-2r$, celui de $\frac{dz}{dt}$ sera $2q$:

$$J_{cx}=2\left(q\frac{dz}{dt}-r\frac{dy}{dt}\right)$$

On aurait de même : $J_{cy}=2\left(r\frac{dx}{dt}-p\frac{dz}{dt}\right)$

et $J_{cz}=2\left(p\frac{dy}{dt}-q\frac{dx}{dt}\right)$

Pour interpréter ces formules il suffit de les rapprocher des formules de rotation, auxquelles elles sont analogues — Le système $Oxyz$ est un solide en mouvement: nous savons que les vitesses de tous ses points sont les mêmes que celles qu'ils posséderaient dans une rotation représentée par le vecteur $O\omega$ qui aurait pour projections p, q, r. Prenons un p $(x'y'z')$ invariablement lié au système mobile: la vitesse qu'il aurait dans la rotation $O\omega$ aurait pour projections sur les axes $Oxyz$:

$$qz' - ry' \qquad rx' - pz' \qquad py' - qx'$$

et pour rendre ces projections identiques aux projections relatives de J_c, il suffit de poser; $x' = 2\frac{dx}{dt}$ $y' = 2\frac{dy}{dt}$ $z' = 2\frac{dz}{dt}$.

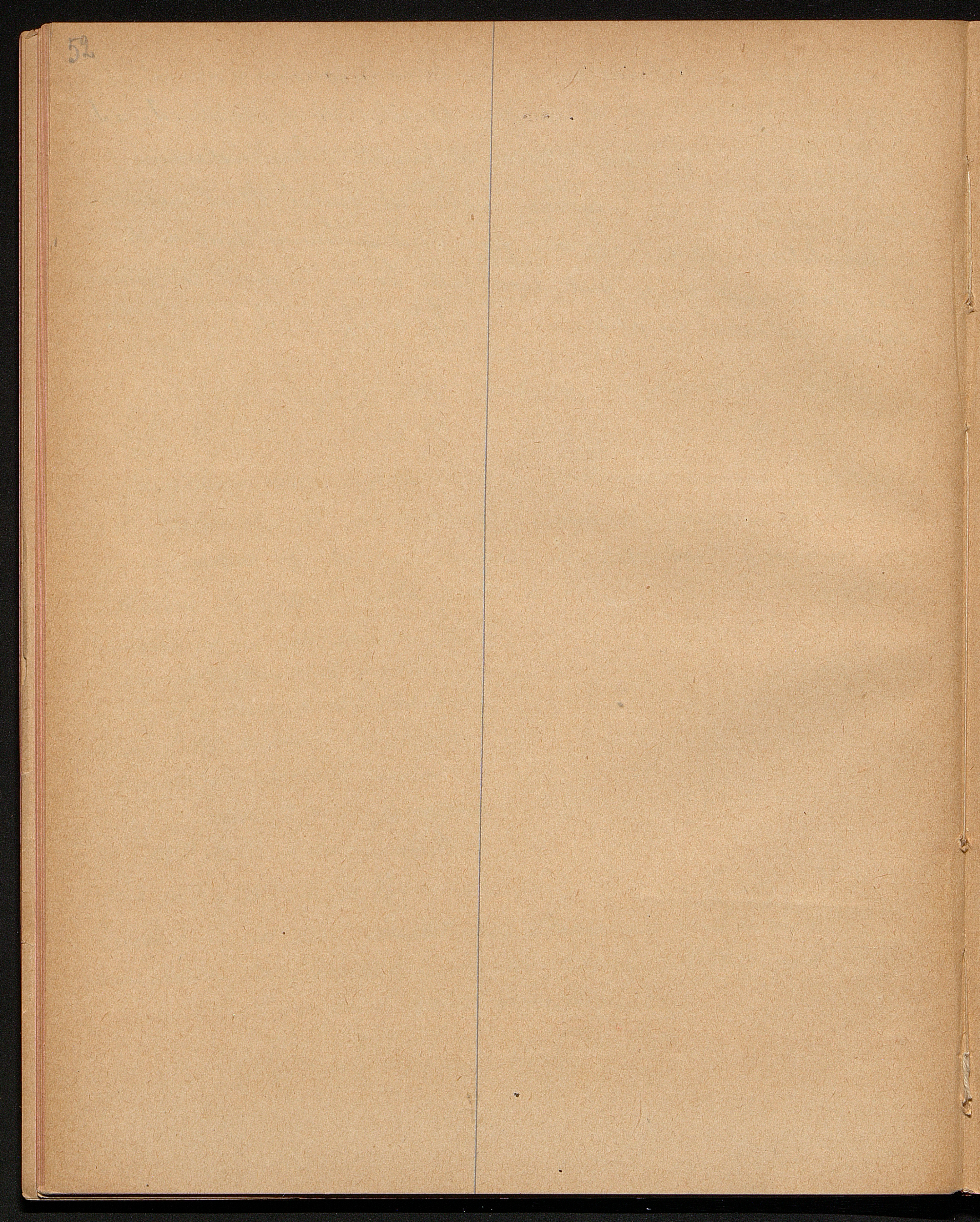
Considérons donc le point dont les coordonnées relatives sont celles-là; c'est l'extrémité M' du vecteur V_R doublé de longueur. On voit que le nouveau vecteur J_c représente la vitesse que possèderait le point M' dans la rotation du système mobile autour de $O\omega$.

Ce vecteur est perpendiculaire au plan de l'axe instantané et de la vitesse relative; il est dirigé dans le sens de la rotation de M' autour de $O\omega$; enfin il a pour valeur absolue le produit $\omega . M'P$ (moment de $O\omega$ par rapport à M') $M'P$ étant la distance de M' à l'axe: $M'P = 2V_R \sin(\omega, V_R)$ d'où; $J_c = 2\omega V_R \sin(\omega, V_R)$

Le vecteur J_c est ainsi complètement déterminé: on le nomme: accélération complémentaire ou de Coriolis; le théorème de Coriolis se résume d'ailleurs par l'égalité géométrique:

$$(J_A) = (J_R) + (J_E) + (J_c)$$

Il peut se faire que J_c soit nul, si un de ses 3 facteurs s'annule, d'où 3 cas : $V_R = 0$ si M est fixe dans le système mobile : $J_A = J_E$.
$\sin(\omega, V_R) = 0$. La vitesse relative est parallèle à l'axe instantané ;
enfin : $\omega = 0$ Si le système mobile est animé d'un mouvement de translation dans le système fixe. C'est seulement dans un de ces 3 cas particuliers qu'on peut avoir entre les accélérations la même relation qu'entre les vitesses : $(J_A) = (J_R) + (J_E)$.



Principes de la mécanique

Définition, mesure et composition des forces constantes & variables.

La mécanique rationnelle repose sur un petit nombre de principes admis a priori.

Il est impossible de vérifier immédiatement ces principes par l'observation ou l'expérience; leur vérité n'est établie qu'indirectement et a posteriori, par la vérification de toutes leurs conséquences.

On étudie d'abord le mouvement le plus simple, qui est celui du point matériel.

Un point matériel est une portion de matière assez petite pour qu'on puisse déterminer sa position dans l'espace comme celle d'un point géométrique.

Principe d'inertie: Si un point matériel est au repos, il reste en repos si rien n'agit sur lui; et s'il est en mouvement, son mouvement est nécessairement rectiligne et uniforme.

On en conclut réciproquement que, si on observe un point matériel dont le mouvement n'est pas rectiligne et uniforme, on peut affirmer que quelque chose agit sur lui: cette cause du mouvement est ce qu'on appelle force par définition, et on dit qu'une force est appliquée au point matériel, et qu'elle lui imprime ce mouvement. On montrera dans la suite que l'effet d'une force est complètement caractérisé par un certain vecteur issu du point matériel auquel elle s'applique, et qu'on nomme son point d'application.

Principe du mouvement relatif et de l'indépendance des effets des forces.

Soit un système de points matériels A, B, C, ... M indépendants les uns des autres, mais animés d'un mouvement commun de translation: ce

système aura à chaque instant une vitesse V_E et une accélération J_E.
Si l'on fait agir sur le point M une nouvelle force à partir d'un instant donné, ce point prendra par rapport au reste du système le même mouvement que si le système était au repos, aucune force n'agissant sur lui; en d'autres termes, le mouvement relatif dû à la force est identique au mouvement absolu du même point soumis à la même force.

Sous l'action de cette force, le point M acquiert une certaine vitesse relative V_R et une accélération relative J_R; comme le mouvement du système est une translation, nous savons que la vitesse et l'accélération absolues du p. M sont: $(V_A) = (V_R) + (V_E)$ $(J_A) = (J_R) + (J_E)$

Nous allons déduire de ce principe plusieurs conséquences importantes.

— Supposons qu'on connaisse le mouvement que prend le point matériel M sous l'action d'une certaine force, quand il part du repos absolu: dans ce mouvement absolu, le point aura à l'instant t la vitesse V et l'accélération J. Lançons-le maintenant avec la vitesse V_0 en le soumettant à la même force, et cherchons quelles seront sa vitesse et son accélération à la même époque t dans ce nouveau mouvement.

Imaginons qu'il fasse partie d'un système ABC.... qu'on lance avec la vitesse V_0; ce système aura un mouvement de translation dont la vitesse sera V_0 et l'accélération 0, en vertu du principe de l'inertie. Dans ce système faisons agir la force sur le point M seul: il prendra un mouvement relatif identique au mouvement absolu qu'il aurait s'il partait du repos. Sa trajectoire relative sera identique à sa trajectoire absolue dans l'hypothèse précédente; sa vitesse relative sera V, son accélération relative sera J, comme dans le mouvement absolu. Donc sa vitesse absolue dans ce nouveau mouvement sera: $(V_0) + (V)$
et son accélération absolue sera: (J) toujours à l'instant t.

Ainsi la vitesse absolue du point M est la somme géométrique de sa vitesse

initiale et de la vitesse qu'il aurait s'il partait du repos sans vitesse initiale; et son accélération absolue est la même en grandeur et direction que s'il partait du repos sans vitesse initiale. On voit que ce qui est constant dans le mouvement d'un point soumis à une même force avec des vitesses initiales différentes, pour la même époque du mouvement, ce n'est pas sa vitesse, mais son accélération. Une fois connue l'accélération due à la force dans le mouvement absolu, on la connaît dans un mouvement relatif quelconque.

Supposons maintenant qu'on ait constaté que le point M soumis à une 1e force et partant du repos prend après le temps t une vitesse V et une accélération J; et que soumis à une 2e force et partant du repos il prend après le même temps t la vitesse V' et l'accélération J'. On demande quelles seront sa vitesse et son accélération après le même temps si on le soumet simultanément à l'action des 2 forces.

Imaginons un système de points matériels ABC.... tous identiques au point M, et soumettons-les chacun à la 1e force, ainsi que M: tous ces points décriront des trajectoires parallèles à celle du point M dans le 1er mouvement; donc le système ABC.. M aura un mouvement de translation dont la vitesse sera V et l'accélération J. Dans ce système, et dès le début du mouvement, faisons agir la 2e force sur M seul: le mouvement relatif du point M sera le même que son 2e mouvement absolu, sa vitesse relative sera V', son accélération relative J'. Donc sa vitesse absolue et son accélération absolue seront les sommes géométriques

$(V) + (V')$ $(J) + (J')$

Il serait aisé de trouver la trajectoire absolue du p. M dans le mouvement composé, en composant ses trajectoires absolues dans les 2 premiers mouvements.

On étendrait sans difficulté ce théorème au cas de 3, 4.... n forces appliquées simultanément au point matériel.

On est ainsi amené à chercher la résultante de plusieurs forces c.à.d. une force qui à elle seule imprimerait au point M partant du repos le même mouvement que toutes les forces données agissant en même temps sur ce point partant du repos. Dans tous les cas la résultante devra imprimer au point M une accélération qui soit la somme géométrique des accélérations dues aux forces données. Si le point part du repos, la vitesse due à la résultante devra être la somme géométrique des vitesses dues aux forces données; si le point a une vitesse initiale la vitesse due à la résultante devra être la somme géométrique des vitesses dues aux forces données et de la vitesse relative. En somme, il suffit que l'accélération due à la résultante soit la même que l'accélération due à l'action simultanée des composantes, quelle que soit la vitesse initiale.

Théorème. Une force constante appliquée à un point matériel lui imprime un mouvement uniformément accéléré (dont l'accélération est constante).
Les forces rectiligne n'étant connues que par leurs effets, on appelle par définition, force constante celle dont les effets sont identiques dans le même temps et dans les mêmes conditions.

Lemme. Soit un point M partant du repos et soumis à une force constante; si après le temps t_1 il prend la vitesse v_1, et après le temps t_2 la vitesse v_2, après le temps (t_1+t_2) il prendra la vitesse $(v_1)+(v_2)$.
En effet, imaginons un système de points matériels ABC..., identiques au p. M, et faisons agir sur chacun d'eux une force constante identique à celle qui agit sur le p. M: le système ABC.... M sera animé d'un mouvement de translation dont la vitesse à l'instant t_1 sera v_1. Si à ce moment nous supprimons les forces qui agissent sur tous les points du système, il prendra un mouvement de translation rectiligne et uniforme dont la vitesse sera v_1. Si au même instant nous établissons

la force appliquée au point M (ce qui revient à ne pas la supprimer), elle lui imprimera un mouvement relatif, et après le temps t_2 compté à partir du moment t_1, il aura acquis la vitesse relative V_2, en vertu de la constance de la force. Donc sa vitesse absolue due à l'action ininterrompue de la force constante pendant le temps (t_1+t_2) sera $(V_1)+(V_2)$, cqfd.

On démontrerait de même qu'après le temps: $(t_1+t_2+\ldots\ldots+t_n)$ le point M aurait une vitesse égale à: $(v_1)+(v_2)+\ldots\ldots+(v_n)$ $v_1, v_2, \ldots\ldots v_n$ étant les vitesses que lui imprime la force constante pendant les laps de temps $t_1, t_2, \ldots\ldots t_n$, en partant du repos.

Cela posé, on va démontrer que la vitesse d'un point sollicité par une force constante est constante en direction et proportionnelle au temps.

Supposons que t_1, t_2 aient une commune mesure θ, et qu'on ait:

$t_1 = p_1\theta \qquad t_2 = p_2\theta \qquad$ p_1 et p_2 étant des nombres entiers.

Soit u la vitesse du point M après le temps θ; la somme géométrique de n segments égaux à u en grandeur et direction est égale au segment nu ayant la même direction. Donc: $\quad v_1 = p_1 u \qquad v_2 = p_2 u$

et ces 2 segments v_1, v_2 sont parallèles à u. On voit donc que les vitesses v_1, v_2 sont parallèles entre elles et proportionnelles à t_1, t_2:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{t_1}{t_2}$$

Dans le cas où t_1, t_2 seraient incommensurables, on considère t_2 comme la limite d'une suite de nombres commensurables avec t_1; on prouve que v_2 est la limite d'une suite parallèle de nombres commensurables avec v_1, et on aura finalement: $\quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{t_1}{t_2}$

v_2 étant parallèle à v_1.

On pourrait aussi employer dans ce cas la démonstration par l'absurde en considérant un temps commensurable avec t_1 et aussi voisin de t_2 qu'on le voudrait.

Puisque la vitesse est tangente à la trajectoire et qu'elle a une direction constante, la trajectoire est nécessairement rectiligne. De plus elle est proportionnelle au temps : $\frac{v}{t} = K = \text{const.}$ ou : $v = Kt$.

Cette équation caractérise le mouvement d'un point soumis à une force constante. On voit que l'accélération est constante, autrement dit que le mouvement est uniformément accéléré ; car en prenant la droite parcourue pour axe des x on a : $\frac{dx}{dt} = v = Kt$ $\frac{d^2x}{dt^2} = K$

Inversement, on peut intégrer la vitesse pour avoir l'espace parcouru :

$$x = \frac{Kt^2}{2}$$ en supposant que le point de départ soit l'origine

Réciproquement, un mouvement rectiligne uniformément accéléré peut être considéré comme produit par une force constante en grandeur et en direction : il suffit de remonter la série des formules précédentes.

Ainsi une force constante est caractérisée par le mouvement rectiligne uniformément accéléré qu'elle imprime à un point matériel partant du repos.

– Si le point, au lieu de partir du repos, a la vitesse initiale v_0, au bout du temps t il aurait la vitesse $(v_0) + (v)$

v étant la vitesse que lui imprimerait la force constante seule pendant le même temps. Il aura la même accélération K, constante en grandeur et en direction, que s'il était parti du repos.

Composition des forces constantes. La résultante de plusieurs forces constantes appliquées à un même point matériel est une force constante.

Considérons seulement 2 forces ; la 1e imprimerait au point, au bout du temps t, une accélération J_1 constante en grandeur et en direction ; la 2e lui imprimerait dans le même temps une accélération J_2 également constante. La résultante de ces 2 forces doit imprimer au point la même accélération que les 2 forces réunies, c.à.d. la somme géométrique des accélérations qu'il doit à chacune : $(J) = (J_1) + (J_2)$

Or cette somme est constante en grandeur et en direction ; donc ~~la~~

force qui produit cette accélération, c.à.d la résultante, est constante en grandeur et en direction.

Le même raisonnement s'appliquerait à un nombre quelconque de forces.

Définition: On appelle direction d'une force constante la direction constante de l'accélération qu'elle imprime au point; on dit par abréviation: de l'accélération due à cette force.

Il reste à définir l'intensité des forces constantes, c.à.d à les mesurer. Pour cela il suffit de définir l'égalité de 2 forces et la somme de 2 forces.

Deux forces sont égales quand leur effet est le même, c.à.d. quand les accélérations qu'elles impriment à un même point sont égales en grandeur seulement.

L'intensité d'une force sera la somme des intensités de 2 autres forces, lorsque l'accélération imprimée par la 1e à un point matériel sera la même que l'accélération imprimée au même point par les 2 derniers agissant dans la même direction. J est la somme algébrique de J_1 et de J_2, puisque ces 3 accélérations ont la même direction. En résumé, 2 forces sont égales quand les accélérations correspondantes sont égales en grandeur, et une force est la somme de 2 autres quand l'accélération due à la 1e est la somme algébrique des accélérations dues aux deux autres.

Ces définitions posées, on peut mesurer les forces constantes. On choisira d'abord un point matériel déterminé auquel on appliquera les diverses forces à comparer. On choisira ensuite pour unité de force la force constante qui imprimera à ce point l'accélération λ. Toute force constante qui imprimera au même point A la même accélération sera égale à l'unité; elle aura l'intensité 1. Une force qui imprimera à A l'accélération 2λ aura l'intensité 2, ou sera mesurée par 2; plus généralement, une force qui lui imprimera l'accélération $n\lambda$, n étant un nombre entier, aura pour mesure le nombre n. De même, si une force produit une accélération $\frac{\lambda}{n}$,

son intensité sera $\frac{1}{n}$; enfin, une force qui produit l'accélération $\frac{p}{q}\lambda$ aura pour mesure $\frac{p}{q}$.

Donc si l'on désigne par F l'intensité de la force qui imprime au p A l'accélération : $J = K\lambda$, on aura par définition : $F = K$

$\frac{F}{J} = \frac{1}{\lambda} =$ const. On peut dire que les forces sont mesurées par les accélérations qu'elles impriment au point A, car si l'on fait agir séparément sur A plusieurs forces $F_1 F_2 \dots F_n$ qui produisent les accélérations $J_1 J_2 \dots J_n$, on a : $\frac{F_1}{J_1} = \frac{F_2}{J_2} = \dots\dots = \frac{F_n}{J_n} = \frac{1}{\lambda}$

Ainsi les intensités des forces sont par définition proportionnelles aux accélérations qu'elles impriment à un même point A.

Voyons maintenant ce qui arrive quand on applique les mêmes forces à un autre point quelconque M. Pour nous en rendre compte, nous admettrons l'axiome indémontrable que voici :

Postulatum. Si 2 forces sont égales, étant appliquées au point A, elles seront égales appliquées à tout autre point matériel.

Soient $F_1, F_2 \dots F_n$ les intensités des forces mesurées par rapport au point A, soient $J_1', J_2', \dots J_n'$ les accélérations qu'elles impriment séparément au point M. On va prouver que les intensités des forces sont encore proportionnelles aux accélérations qu'elles impriment au p M.

Supposons que les 2 forces aient une commune mesure f :

$F_1 = p_1 f \qquad F_2 = p_2 f \qquad p_1 p_2$ nombres entiers.

Soit γ l'accélération que f imprimerait au point matériel M :

on aura : $J_1' = p_1 \gamma \qquad J_2' = p_2 \gamma$.

Donc on a encore : $\frac{F_1}{J_1'} = \frac{F_2}{J_2'} = \dots\dots = \frac{F_n}{J_n'} = m$

pour un nombre quelconque de forces. Le rapport de la force à l'accélération

est constant pour le point M : c'est cette quantité constante qu'on nomme masse du point matériel. Ce nombre m dépend du choix du point A pris pour type ou pour unité de masse, et du choix de l'unité de force c.à.d. de l'unité d'accélération λ.

Les forces constantes sont donc complètement déterminées quand on sait mesurer leur intensité. On représente une force constante par un vecteur issu du point d'application, ayant la direction de la force, c.à.d. de l'accélération due à la force, et une longueur égale numériquement à l'intensité F de la force. On a d'ailleurs entre F et l'accélération J qu'elle imprime au point M la relation :

$$F = mJ.$$

On peut maintenant résoudre complètement le problème de la composition des forces constantes.

Considérons d'abord 2 forces $F_1 F_2$ appliquées au point M ; soient J_1, J_2 les accélérations qu'elles lui imprimeraient séparément. Nous savons que leur résultante doit imprimer au même point l'accélération J :

$$(J) = (J_1) + (J_2)$$

M, J_2, F_2, J_1, J, F_1, F

qui n'est autre que la diagonale du parallélogramme de $J_1 J_2$. Nous savons déjà que cette résultante a pour point d'application M et pour direction MJ. Or on a en vertu du théorème précédent :

$$F_1 = mJ_1 \qquad F_2 = mJ_2 \qquad F = mJ$$

On voit donc que la figure MF_1FF_2 est homothétique de la fig MJ_1JJ_2 par rapport au point M, et que le rapport d'homothétie est m ; donc F est la diagonale du parallélogramme de $F_1 F_2$, c.à.d. la somme géométrique des forces concourantes F_1, F_2.

On étendrait aisément ce théorème au cas de 3... n forces concourantes, et on verrait que la composition des forces se fait suivant la règle générale de

composition des vecteurs concourants : la résultante est la somme géométrique des composantes.

Nous devons maintenant faire connaître les unités de force employées habituellement. Pour cela, il nous faut entrer dans quelques considérations sur la pesanteur, en anticipant sur des études ultérieures.

Si l'on abandonne à lui-même un point matériel situé à la surface de la terre, il tombe suivant un mouvement uniformément accéléré. La valeur de cette accélération g est à Paris de $9^m,808$ en prenant pour unité de temps la seconde. Le point prend ce mouvement sous l'action de la terre, ou de l'attraction terrestre; et le mouvement observé est un mouvement relatif, puisque la terre se meut dans l'espace suivant une loi très compliquée.

On définit d'autre part le **poids** du point matériel; imaginons qu'il soit maintenu en repos relatif par un obstacle, un fil par exemple. Le point est en équilibre dans une certaine position; il est sollicité par l'attraction de la terre et par la tension du fil; mais on ne peut dire que ces 2 forces se font équilibre, puisque le point n'est pas en repos absolu, mais décrit dans l'espace une courbe fort complexe sous l'action d'autres forces. Donc on ne peut affirmer que l'attraction terrestre et la tension du fil soient égales et opposées.

On appelle **poids** du corps une force *fictive* égale et opposée à la tension du fil qui soutient ce corps en équilibre relatif. Le poids ne serait identique à l'attraction de la terre que si la terre était immobile dans l'espace. Mais on démontre que dans une petite étendue de la surface de la terre, le mouvement relatif de chute est le même que si, la terre étant immobile, le point matériel était sollicité par son poids. On peut donc dire, au même degré d'approximation, qu'un corps tombe sous l'action de son poids. — Or le mouvement de chute par rapport à la terre étant uniformément accéléré, on peut affirmer que le poids est une force constante (dans les limites assignées à l'observation). Soit P l'intensité du

poids, mesurée comme on l'a dit plus haut; on a évidemment

$$\frac{P}{g} = m \qquad \text{ou} \qquad P = mg$$

Le poids absolu d'un point matériel, qu'on vient de définir, n'est pas le même en tous les lieux de la terre, car g varie suivant la latitude: comme m est un coefficient constant pour le même point matériel, son poids absolu varie comme g: il est donc plus petit à l'équateur qu'aux pôles. D'ailleurs son poids relatif, c-à-d. le rapport de son poids absolu au poids ~~absolu~~ d'un corps pris pour unité, est constant sur toute la terre (puisqu'en chaque lieu g est le même) et égal au rapport des masses.

Le poids absolu d'un corps est par définition la somme des poids absolus des points matériels qui le composent.

L'unité de force usuelle est le kilogramme-force: c'est le poids absolu d'un litre d'eau distillée à son maximum de densité dans le vide à Paris. Il est nécessaire de spécifier le lieu où l'on prend cette unité, puisque le poids absolu d'un même corps varie suivant les lieux. Quand on aura mesuré la force ~~qui~~ constante qui agit sur un ~~point~~ corps au moyen de cette unité, on pourra calculer la masse de ce point en mesurant son accélération dans l'unité de temps. ~~et en le multipliant par~~ P étant en n'importe quel lieu le poids absolu du corps rapporté au kilogramme-force, et g étant mesuré au même lieu, on aura la masse du corps par la formule: $m = \frac{P}{g}$.
On voit que m dépend du choix de l'unité de longueur et de l'unité de force. L'unité de masse est la masse du corps dont le poids absolu en un lieu quelconque est mesuré par le même nombre que l'accélération dans l'unité de temps. A Paris, c'est le corps qui a pour poids absolu $9^k,808$. La définition et la mesure de la masse sont indépendantes, comme cela doit être, du lieu où on la considère. Mais on voit que ce système d'unités dépend (par le kilo-

gramme-force) du choix d'un lieu de la terre.

Dans le système des unités absolues (dont la première idée est due à Gauss) on mesure les forces par les masses ; l'unité de masse est indépendante du lieu de la terre où l'on opère. La mesure des masses est d'ailleurs facile : on peut comparer les masses au moyen de la balance : en effet, nous venons de voir que les masses des corps sont proportionnelles à leurs poids relatifs en un même lieu, parce que g est le même en ce lieu pour tous les corps : donc les masses sont proportionnelles aux poids absolus, et par suite aux poids relatifs.

On prend pour unité de masse le gramme-masse : c'est la masse d'un centimètre cube d'eau distillée à son maximum de densité (4° centigrade). Dès lors la masse d'un corps et son poids en grammes seront exprimés par le même nombres on dit par abréviation que la masse est égale au poids relatif.

La mesure de la force dépend alors de la mesure de l'accélération ; pour celle-ci, on prend pour unité de longueur le centimètre et pour unité de temps la seconde ; on mesure l'accélération (en centimètres) pendant 1 seconde ; la mesure de la force sera donnée par la formule : $F = m\,J$

Ainsi l'unité de force dérive des unités fondamentales déjà établies : on l'appelle la dyne. C'est la force qui, agissant sur l'unité de masse, lui imprime dans l'unité de temps une accélération égale à l'unité de longueur. Le système des 3 unités fondamentales, appelé par abréviation système C.G.S., a été adopté par le congrès des électriciens en 1881.

La dyne est une force très-petite comparée à la force musculaire de l'homme : le poids d'un gramme est à Paris de 980,8 dynes. Cette unité a été choisie dans l'ordre de grandeur des forces électriques.

De la considération des forces constantes on passe aisément à celle des forces variables ; pour cela, il faut d'abord établir le théorème suivant :

L'accélération moyenne due à une force constante est constante en grandeur et en direction.

Rappelons la définition de l'accélération moyenne (page 30)

Supposons qu'en M le point mobile ait la vitesse MV, en M_1 la vitesse M_1V_1. Par M menons le vecteur MU égal et parallèle à M_1V_1. Menons le vecteur MH différence géométrique de MU et de MV, et divisons-le par Δt (intervalle de temps entre M et M_1) nous obtenons MI :

$$MI = \frac{(V_1) - (V)}{\Delta t}$$

Ce vecteur MI est l'accélération moyenne du mobile dans l'intervalle Δt.

– Cela posé, considérons d'abord un point matériel partant du repos, et soumis à une force constante ; nous savons que son mouvement est rectiligne et a pour équation : $x = \frac{1}{2}Jt^2$ $\quad V = Jt$

A l'époque $(t+\Delta t)$ la vitesse sera : $V_1 = J(t+\Delta t)$

V_1 et V étant sur la même direction, leur différence géométrique est leur différence algébrique : $(V_1) - (V) = J\Delta t$ $\quad \frac{V_1 - V}{\Delta t} = J = \text{const}^{e}$ c.q.f.d.

Supposons maintenant que le mobile ait une vitesse initiale V_0 ; soit V' sa vitesse à l'époque t, V_1' sa vitesse à l'époque $(t+\Delta t)$ dans ce nouveau mouvement ; nous savons que : $(V') = (V_0) + (V)$ $\quad V_1' = (V_0) + (V_1)$

Calculons l'accélération moyenne : $\frac{(V_1') - (V')}{\Delta t} = \frac{(V_1) - (V)}{\Delta t} = J = \text{const}^{e}$ comme précédemment. On voit que la vitesse initiale disparaît de l'expression de l'accélération moyenne. Inutile de remarquer que l'accélération moyenne est constamment égale à l'accélération instantanée J –

Considérons à présent un mobile animé d'un mouvement quelconque. S'il possède une accélération variable, on peut affirmer qu'il est soumis à une force variable. Soit encore V sa vitesse à l'époque t, V_1 sa vitesse à l'époque

$(t+\Delta t)$; on appelle valeur moyenne de la force variable pendant l'intervalle Δt, la force constante qu'il faudrait faire agir sur ce mobile pendant ce même intervalle pour que, possédant ~~en~~ t à l'époque t la vitesse V, il eût à l'époque $(t+\Delta t)$ la vitesse V_1 (Il faut remarquer que la trajectoire ne serait pas la même nécessairement et que le mobile partant du point M sous l'action de la force constante n'arriverait pas en général en M_1 après le laps Δt ; en effet, la force constante lui ferait suivre ~~une~~ la parabole osculatrice à sa trajectoire en M.)

Cette valeur moyenne de la force est facile à évaluer : si la force constante fait varier la vitesse du mobile de V à V_1 dans le temps Δt, c'est que l'accélération due à cette force est égale à chaque instant à : $\dfrac{(V_1) - (V)}{\Delta t}$
c.à.d. à l'accélération moyenne du mouvement réel.
Si l'on répète la construction faite ci-dessus, on trouvera un vecteur MI qui représentera à la fois l'accélération moyenne due à la force variable et l'accélération instantanée (constante) due à la force constante fictive. Soit Φ l'intensité de cette force fictive, c.à.d. la valeur moyenne de la force variable, on a :

$$\Phi = m.\ MI$$

On pourrait donc définir la valeur moyenne de la force dans l'intervalle Δt : le produit de la masse du mobile par l'accélération moyenne dans cet intervalle.
On appelle <u>valeur de la force à l'instant</u> t la limite de sa valeur moyenne quand Δt tend vers 0. — Pour l'obtenir, il suffit de faire Δt infiniment petit dans les formules précédentes. Soit F la limite de Φ : c'est la valeur de la force à l'instant t. D'autre part, MI tend vers MJ accélération du mobile à l'instant t, on a donc :

$$F = m.\ MJ$$

Ainsi la valeur de la force variable à chaque instant est le produit de la masse du mobile par son accélération au même instant.

On représente les forces variables par des vecteurs variables, comme les forces constantes par des vecteurs constants : il suffit de multiplier par m le vecteur

qui représente l'accélération due à la force au même instant.
On compose entre elles les forces variables comme les forces constantes.
Soit un point M auquel la force F_1 imprime au bout du temps t l'accélération J_1, et la force F_2 au bout du même temps l'accélération J_2; on a :

$$F_1 = mJ_1 \qquad F_2 = mJ_2$$

Si l'on fait agir à la fois les 2 forces sur le même point, il acquerra au bout du temps t l'accélération J : $(J) = (J_1) + (J_2)$
Soit F la résultante des 2 forces, c à d la force qui imprimerait au point M l'accélération J dans le temps t ; $F = mJ$.
Donc : $(F) = (F_1) + (F_2)$
La résultante est la diagonale du parallélogramme des forces (en vertu de l'homothétie) c à d leur somme géométrique.
En appliquant le même raisonnement à 3, 4, ... n forces appliquées au même point, on établirait la proposition générale :
Un nombre quelconque de forces variables concourantes est équivalent par ses effets à une seule force variable égale à chaque instant à la somme géométrique des forces données : elle est dite résultante des forces concourantes.
On obtient la résultante par la règle générale d'addition des vecteurs.
Une conséquence immédiate de ce théorème est la proposition suivante, qui n'en est qu'une autre forme :
Quand un corps est en mouvement, son accélération est égale à la somme géométrique des forces qui agissent sur lui divisée par sa masse.
Cela résulte de la formule : $(F_1) + (F_2) + \dots + (F_n) = mJ$.
Il suffit de traduire cette proposition fondamentale analytiquement pour obtenir les équations générales du mouvement.
Soient $X_1\ Y_1\ Z_1$ les projections de F_1 sur les 3 axes coordonnés; .... $X_n\ Y_n\ Z_n$ celles de F_n, $X\ Y\ Z$ celles de leur résultante F ; on a :

$X = \Sigma X_1 \qquad Y = \Sigma Y_1 \qquad Z = \Sigma Z_1 \qquad F = mJ.$

Or les projections de J sont, xyz étant les coordonnées du p. mobile M:

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2}.$$ Donc:

$$X = m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad Y = m\frac{d^2y}{dt^2} \qquad Z = m\frac{d^2z}{dt^2}$$

Elles sont les 3 équations du mouvement d'un point matériel. Elles servent à résoudre tous les problèmes de la dynamique, c.à.d. à les ramener à des questions d'analyse (intégrations ou différentiations).

Elles permettent de résoudre en particulier les 2 problèmes fondamentaux de la dynamique du point matériel. Pour trouver la force qui produit un mouvement donné, il suffit de différentier 2 fois les équations finies du mouvement qui donnent x, y, z en fonction du temps. Pour trouver le mouvement que produit une force donnée, il faut effectuer 2 intégrations: aussi ce second problème est-il plus difficile que le premier.

Pour ce second problème, F peut être donné en fonction de la position du mobile, c.à.d. de ses coordonnées (x, y, z); elle peut aussi être donnée en fonction de la vitesse du mobile, c.à.d. des dérivées premières $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$ elle peut encore être donnée en fonction du temps seul.

Le cas le plus général est celui où F serait à la fois fonction de ces 7 quantités:

$$X = \varphi\left(x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, t\right)$$
$$Y = \psi\left(x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, t\right)$$
$$Z = \varpi\left(x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, t\right)$$

en remplaçant X, Y, Z par leurs valeurs en dérivées secondes, on aura 3 équations différentielles du 2e ordre qui donneront, si on les intègre, x, y, z en fonction de t, c.à.d. le mouvement cherché. Or l'intégration introduira dans les expressions de x, y, z 6 constantes arbitraires, et on

aura pour les équations finies du mouvement :

$$x = \Phi(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)$$
$$y = \Psi(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)$$
$$z = \Pi(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)$$

Donc, quand la force est donnée, le mouvement n'est pas complètement défini ; mais il le sera si on se donne les conditions initiales, c.à.d. la position et la vitesse du mobile à l'instant $t=0$. On aura alors 6 équations de la forme :

$$x_0 = \Phi(0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)$$
$$- - - - - - - - - -$$
$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = \Phi'_t(0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)$$
$$- - - - - - - - - -$$

qui déterminent les 6 constantes. Or, on admet en mécanique que si les fonctions Φ, Ψ, Π sont uniformes et bien définies (univoques) les 6 constantes ne peuvent prendre qu'un seul système de valeurs, et conséquemment, que, les conditions initiales une fois données, le mobile ne peut prendre qu'un seul mouvement. Ce postulat se vérifie d'ailleurs dans toutes les applications.

Principe de l'égalité de l'action et de la réaction.

Si un corps A exerce sur un corps B une certaine action, le corps B exerce sur le corps A une action égale et directement opposée à la première.

Par cette action du corps A et cette réaction du corps B, il faut entendre certaines forces : en vertu du principe, elles sont égales et directement opposées.

— On sait que les équations de la géométrie analytique doivent être homogènes tant qu'on n'a pas fixé les unités de longueur. En mécanique

7°

Les équations doivent avoir une triple homogénéité : comme on ne spécifie pas, dans les équations théoriques, les 3 unités fondamentales, ces équations doivent être homogènes par rapport à chacune des 3 unités, c.à.d. rester les mêmes quand on change une quelconque de ces unités. Si l'on prend par exemple une unité de longueur λ fois plus petite, une unité de masse μ fois plus petite, une unité de temps τ fois plus petite, la longueur l deviendra $l\lambda$, la masse m deviendra $m\mu$, le temps t deviendra $t\tau$. Voyons ce que deviennent les quantités considérées généralement en mécanique.

Pour la vitesse : $V = \frac{ds}{dt}$, elle devient : $\frac{\lambda\, ds}{\tau\, dt} = V\frac{\lambda}{\tau}$.

Pour l'accélération : $J = \frac{dV}{dt}$, elle devient : $\frac{\frac{\lambda}{\tau} dV}{\tau\, dt} = J\frac{\lambda}{\tau^2}$.

Pour la force : $F = mJ$, elle devient : $m\mu J\frac{\lambda}{\tau^2} = F\frac{\lambda\mu}{\tau^2}$.

Une équation entre ces diverses quantités devra subsister quel que soit le système d'unités choisi ; donc λ, μ, τ doivent disparaître de ces équations. Telle est la condition d'homogénéité des équations de la mécanique.

Exemple : Prenons la formule de la durée des oscillations infiniment petites d'un pendule simple de longueur l : $t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

On aura dans le nouveau système d'unités :

$t\tau = \pi\sqrt{\frac{l\lambda}{g\frac{\lambda}{\tau^2}}}$ λ et τ disparaissent : $t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

La seule considération de l'homogénéité permet de trouver la forme de certaines fonctions que l'on cherche à déterminer. Supposons, pour reprendre l'exemple précédent, que l'on sache seulement que t dépend de l et de g ; on pourra poser : $t = \varphi\left(\frac{l}{g}, l\right)$

Cette équation devra être homogène. $t\tau = \varphi\left(\frac{l}{g}\tau^2, l\lambda\right)$

devra être une relation identique en τ et λ.

Or le 1er membre ne contient pas λ, donc le 2e membre est indépendant de λ, et l'on a simplement : $t = \varphi\left(\frac{l}{g}\right)$ $\qquad t\tau = \varphi\left(\frac{l}{g}\tau^2\right)$

Pour que cette équation soit homogène, il faut que φ soit homogène du degré $\frac{1}{2}$ en $\frac{l}{g}$, qui est l'unique variable. Posons : $\tau = \sqrt{\frac{g}{l}}$

$t\sqrt{\frac{g}{l}} = \varphi(1) = K$ d'où : $t = K\sqrt{\frac{l}{g}}$

Le coefficient numérique K reste seul indéterminé ; on trouve par une autre méthode qu'il est égal à π.

Autre exemple : On sait que si on laisse tomber un point matériel pesant dans le vide, d'une hauteur h sans vitesse initiale, sa vitesse est : $v = \sqrt{2gh}$ On aura dans le nouveau système d'unités :

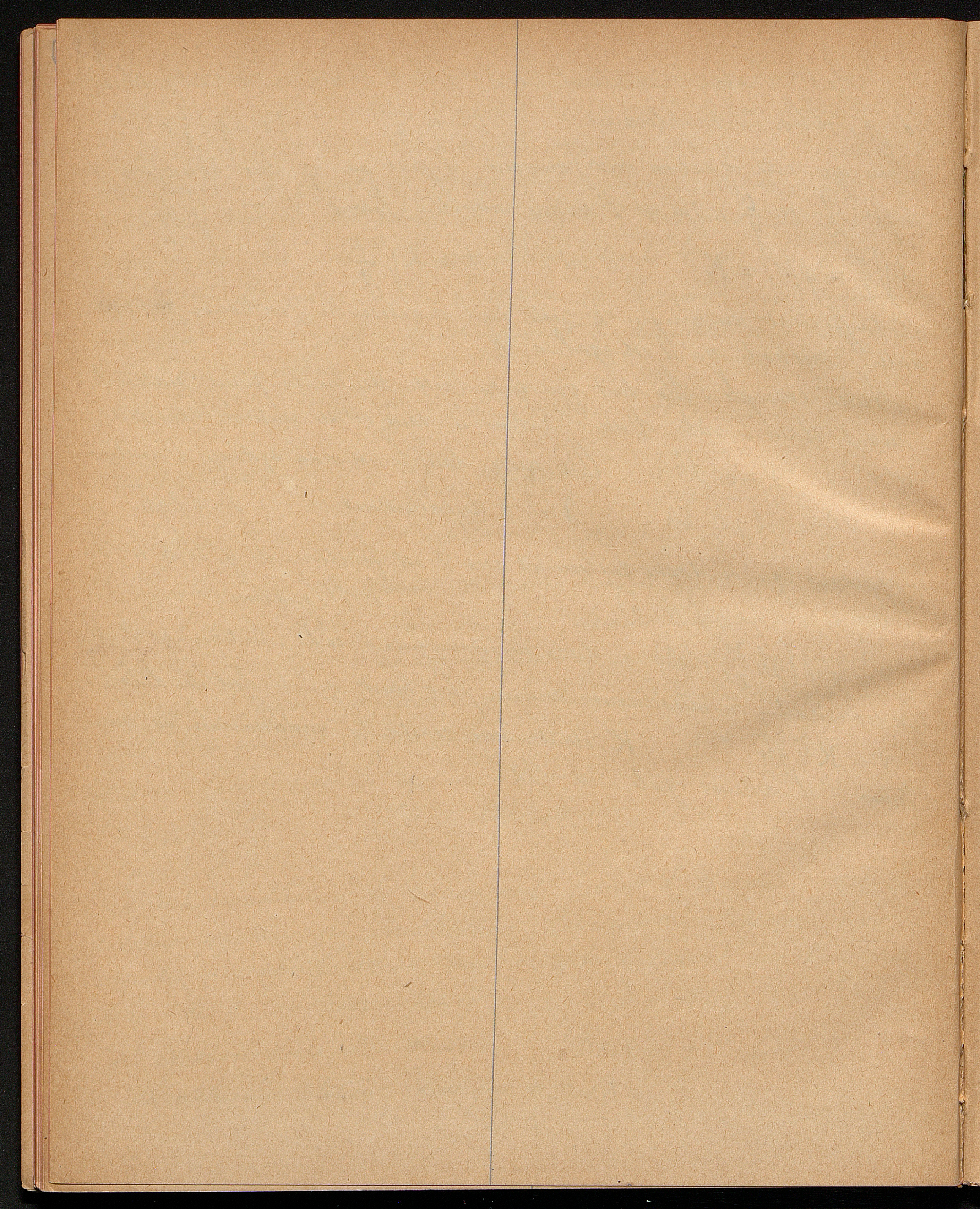
$v\frac{\lambda}{\tau} = \sqrt{2g\frac{\lambda}{\tau^2}h\lambda}$ λ et τ disparaissent : $v = \sqrt{2gh}$.

Supposons qu'on sache seulement que v est fonction de g et de h : on posera : $v = \varphi(gh, h)$ et l'équation :

$v\frac{\lambda}{\tau} = \varphi\left(gh\frac{\lambda^2}{\tau^2}, h\lambda\right)$ devra être homogène, c.à.d. identique en λ et τ.

On trouverait, en raisonnant comme plus haut, qu'elle doit être de la forme :

$v = K\sqrt{gh}$ K étant une constante indéterminée qu'on trouve d'ailleurs égale à $\sqrt{2}$.



Statique

Statique du point matériel.

On dit qu'un point matériel mobile est en équilibre, quand, abandonné sans vitesse initiale, il reste immobile.

Il en résulte que les forces qui agissent sur un point en équilibre ne dépendent pas de sa vitesse, mais seulement de sa position et du temps; les équations de la force résultante sont de la forme:

$$X = \varphi(x, y, z, t)$$
$$Y = \psi(x, y, z, t)$$
$$Z = \varpi(x, y, z, t)$$

En statique, on considère en général des forces qui ne dépendent pas non plus du temps; donc, à moins d'indication contraire, on admettra que les forces données sont fonctions uniquement de x, y, z.

Nous allons étudier d'abord les conditions d'équilibre d'un point libre, c.à.d. pouvant se déplacer d'une manière quelconque dans l'espace.

Soit le point $M(x, y, z)$ sollicité par n forces $F_1 F_2 \ldots\ldots F_n$.

Ces forces ont en général une résultante F : pour que le point soit en équilibre, il faut et il suffit que cette résultante soit nulle: $F = 0$.

Géométriquement, il faut et il suffit que le polygone des forces se ferme c.à.d. que le point F_n' vienne coïncider avec M.

Dans le cas particulier de 3 forces, il faut et il suffit que ces 3 forces soient respectivement égales et parallèles aux 3 côtés d'un triangle parcourus dans un même sens de circulation. Il en résulte: 1° que les 3 forces doivent être dans un même plan. 2° que chacune d'elles ~~est~~ doit être proportionnelle au sinus des 2 autres: (de l'angle)

$$\frac{F_1}{\sin(F_2 F_3)} = \frac{F_2}{\sin(F_1 F_3)} = \frac{F_3}{\sin(F_1 F_2)}$$

Mais ces 2 conditions nécessaires ne sont pas suffisantes : il faut encore exprimer qu'une quelconque des 3 forces ne tombe pas dans l'angle des 2 autres, c.à.d. que le sens de circulation est le même sur les 3 côtés du triangle.

En effet, soient 2 forces F_1, F_2 et leur résultante F : elles satisfont aux 2 premières conditions, mais non à la dernière. Celle-ci exige que la 3e force F_3 soit égale et opposée à F.

Analytiquement, on exprimera les conditions nécessaires et suffisantes de l'équilibre par les 3 équations : $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$,

c.à.d. $\Sigma X_1 = 0$ $\Sigma Y_1 = 0$ $\Sigma Z_1 = 0$.

Ce sont 3 équations à 3 inconnues, x, y, z. Chaque système de solutions détermine une position d'équilibre du point mobile.

L'équilibre d'un point matériel peut être stable ou instable.

L'équilibre d'un point est stable si, quand on écarte infiniment peu le point de sa position d'équilibre et qu'on lui imprime une vitesse initiale infiniment petite dans une direction quelconque, ce point reste à une distance infiniment petite de sa position d'équilibre.

La recherche des conditions de la stabilité d'un équilibre est comme on voit, un problème de dynamique.

Un cas, très particulier théoriquement, mais très général dans la pratique est celui où X, Y, Z sont les dérivées partielles d'une certaine fonction $U(x, y, z)$

$$X = \frac{\partial U}{\partial x} \qquad Y = \frac{\partial U}{\partial y} \qquad Z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

On sait par l'analyse à quelles conditions cela a lieu. Il faut que :

$X dx + Y dy + Z dz$ soit une différentielle totale exacte ;

pour cela, il faut et il suffit qu'on ait à la fois :

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \qquad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x} \qquad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}$$

On dit dans ce cas qu'il existe une fonction des forces V, ou encore que les forces dérivent d'un potentiel: $-V$.

Les équations de l'équilibre: $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial V}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial V}{\partial z} = 0$

sont alors celles du maximum ou du minimum de la fonction des forces. On est ainsi ramené, dans ce cas très fréquent dans les applications, au problème analytique de la recherche des maxima et des minima d'une fonction de plusieurs variables — Remarquons que la fonction V n'a pas nécessairement un maximum ou un minimum chaque fois que ses 3 dérivées partielles s'annulent; de sorte que si à tout maximum ou minimum de V correspond une position d'équilibre, toute position d'équilibre ne correspond pas à un maximum ou minimum de V.

On démontrera en dynamique que (théorème de Lejeune-Dirichlet) si V passe réellement par un maximum, l'équilibre est stable dans la position correspondante.

Appliquons ces conclusions à l'exemple suivant:

Problème. Soient n points fixes $M_1, M_2, \ldots, M_n$ de masses $m_1, m_2, \ldots, m_n$; on suppose qu'ils attirent un point mobile M proportionnellement aux masses et aux distances. Trouver les positions d'équilibre du point M.

Soient $a_1 b_1 c_1$ les coordonnées de M_1, $a_2 b_2 c_2$ celles de M_2, ... $a_n b_n c_n$ celles de M_n; x, y, z celles de M. L'attraction exercée par le point M_1 sur le point M est une force F_1 dirigée suivant MM_1 et proportionnelle à m_1 et à MM_1.

On a donc: $F_1 = k m_1 . \overline{MM_1}$

et de même: $F_2 = k m_2 . \overline{MM_2}$

$\ldots\ldots$

$F_n = k m_n . \overline{MM_n}$

Soient $X_1, Y_1, Z_1 \ldots\ldots X_n\, Y_n\, Z_n$ les projections des forces $F_1 \ldots F_n$ sur les 3 axes ; elles sont :

$$X_1 = km_1(a_1 - x) \qquad Y_1 = km_1(b_1 - y) \qquad Z_1 = km_1(c_1 - z)$$

$$X_n = km_n(a_n - x) \qquad Y_n = km_n(b_n - y) \qquad Z_n = km_n(c_n - z)$$

On a pour les projections de la résultante F les sommes :

$$X = k\Sigma m_1 \times (\xi - x) \quad \text{en posant} \quad \xi = \frac{\Sigma m_1 a_1}{\Sigma m_1}$$

$$Y = k\Sigma m_1 \times (\eta - y) \qquad \eta = \frac{\Sigma m_1 b_1}{\Sigma m_1}$$

$$Z = k\Sigma m_1 \times (\zeta - z) \qquad \zeta = \frac{\Sigma m_1 c_1}{\Sigma m_1}$$

On voit que l'expression de la résultante a la même forme que celle des composantes. Soit G le point dont les coordonnées sont ξ, η, ζ (c'est le centre de gravité du système des masses fixes.) La résultante des attractions exercées sur le point M par le système est identique à l'attraction que ce point éprouverait de la part du point fixe G suivant la même loi, en supposant toutes les masses du système concentrées au point G.

Les équations de l'équilibre : $X = 0 \quad Y = 0 \quad Z = 0$

ont pour unique solution : $x = \xi \quad y = \eta \quad z = \zeta$.

Ainsi le point M sera en équilibre si on le place au centre de gravité du système. Ce résultat est évident si l'on remarque que la résultante est l'attraction exercée par le seul point G ; il n'y aura équilibre que si M vient coïncider avec G.

Dans le cas présent, proportionnellement à la distance il existe une fonction de forces, car

$$Xdx + Ydy + Zdz = k\Sigma m_1\left[(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz\right]$$

Donc

$$U = -k\frac{\Sigma m_1}{2}\left[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2\right] = -k\frac{\Sigma m_1}{2}\,\overline{MG}^2$$

La position d'équilibre trouvée plus haut correspond au maximum de U,

car elle annule cette fonction constamment négative. Donc la position unique d'équilibre est une position d'équilibre stable.

— On pourrait généraliser le problème en supposant que $m_1\, m_2 \ldots\ldots m_n$ ne sont plus des masses essentiellement positives, mais des coefficients numériques de signe quelconque. Pour les points où m sera négatif, la force sera répulsive, car elle change de sens quand m change de signe. Les calculs seront les mêmes, à la condition : $\Sigma m_1 \gtrless 0$.

La résultante sera attractive si : $\Sigma m_1 > 0$, répulsive si : $\Sigma m_1 < 0$.

L'équilibre sera stable dans le 1er cas, V étant toujours négative, et devenant maximum pour $MG = 0$; il sera instable dans le 2e, V étant toujours positive, et devenant minimum pour $MG = 0$.

Dans le cas où $\Sigma m_1 = 0$, les coefficients de x, y, z s'annulent dans X, Y, Z, et il reste les valeurs constantes :

$$X = k\, \Sigma m_1 a_1$$
$$Y = k\, \Sigma m_1 b_1$$
$$Z = k\, \Sigma m_1 c_1$$

La résultante est alors constante en grandeur et direction ; le point G n'existe plus (ou est rejeté à l'infini) et il n'y a pas d'équilibre possible, à moins que la résultante ne soit nulle, c.à.d.

$$\Sigma m_1 a_1 = 0 \qquad \Sigma m_1 b_1 = 0 \qquad \Sigma m_1 c_1 = 0 .$$

auquel cas le point M serait partout en équilibre (Equilibre indifférent.)

— Nous avons considéré jusqu'ici un point matériel libre dans l'espace. S'il est assujetti à certaines conditions, on dit qu'il est soumis à des liaisons. La liaison la plus simple est celle d'un point mobile assujetti à se trouver constamment sur une surface fixe donnée, soit qu'il ne puisse pas du tout en sortir, soit qu'il puisse la quitter d'un seul côté, auquel cas on le dit *posé* de ce côté sur la surface.

L'équilibre d'un point ainsi lié ne pourra avoir lieu que si la résultante des forces qui lui sont appliquées est normale à la surface (ou nulle.)

En effet, si la force était oblique, on pourrait la décomposer en 2 composantes, l'une normale qui tendrait à séparer le point de la surface et qui serait détruite en vertu de la liaison, l'autre tangentielle qui ferait glisser le point matériel sur la surface (on suppose que le point mobile glisse sans frottement sur la surface, c.à.d. que la surface n'oppose aucune résistance à son déplacement.) Il ne peut donc y avoir équilibre que si la force est normale à la surface; mais alors il faut distinguer les 2 cas indiqués plus haut: si le point ne peut ~~sortir~~ de la surface, l'équilibre a lieu dans tous les cas où la force est normale; mais s'il est seulement posé sur la surface, il faut que la force soit dirigée de l'autre côté, de manière à l'appliquer sur la surface et non à l'en séparer.

Pour pouvoir distinguer analytiquement ces 2 cas, il faut considérer la réaction normale de la surface sur le point. — Puisque le point ne peut quitter la surface (d'un côté au moins), les points voisins de la surface doivent exercer sur lui une certaine résistance, c.à.d. des forces; la résultante de ces forces appliquées au point mobile est par définition la réaction de la surface. Elle est normale, puisque par hypothèse la surface n'oppose aucune résistance au déplacement du point matériel dans la surface elle-même (car s'il y avait frottement, il y aurait une composante tangentielle de la réaction qui la rendrait oblique.) On représente cette réaction normale par un vecteur MN.

Mais puisque le point est en équilibre, on peut le regarder comme libre et soumis à 2 forces F et N (car on peut supprimer la surface à condition de conserver la force MN qui est l'action qu'elle exerce sur le point matériel.) Le point est donc en équilibre sous l'action des 2 forces F et N, ce qui exige qu'on ait:

$$(F) + (N) = 0 \qquad \text{ou:} \qquad (F) = -(N)$$

— Supposons maintenant que le point soit posé d'un côté de la surface: la réaction normale devra être dirigée de ce côté (puisqu'elle s'oppose à ce que le point passe de l'autre) et la force devra être dirigée en sens inverse. C'est la condition que nous allons exprimer analytiquement.

Soit : $f(x, y) = 0$ l'équation de la surface en coordonnées rectangulaires.
La normale à la surface a pour paramètres directeurs : $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$.
Les projections de la réaction normale sur les axes seront donc :

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \lambda \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Les équations de l'équilibre seront alors, avec : $f(x, y, z) = 0$

$$X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

système de 4 équations à 4 inconnues : x, y, z, λ, qui donnera les positions d'équilibre sur la surface. Une fois ces positions trouvées, il faudra, dans le cas où le point est simplement posé sur la surface, choisir celles de ces positions pour lesquelles la force a un certain sens, c.à.d. λ un certain signe. En effet, la fonction $f(x, y, z)$, nulle sur la surface, est positive d'un côté et négative de l'autre. Or les paramètres directeurs $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ définissent sur la normale le sens dirigé vers le côté où f est positive — Donc, si le point est posé du côté où f est positive, la réaction normale devra être dirigée de ce même côté, c.à.d. que ses projections auront le même signe que : $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$; par conséquent on doit avoir $\lambda > 0$.
Si au contraire le point est posé du côté où f est négative, on doit avoir : $\lambda < 0$. — Au moyen de cette règle, on choisira les solutions où λ a le signe convenable, et on exclura les autres.

Appliquons ces conclusions à l'exemple suivant :

Problème. Trouver les positions d'équilibre d'un point matériel mobile placé sur la surface extérieure d'une ellipsoïde et repoussé par un point P fixe proportionnellement à la distance.

Rapportons l'ellipsoïde à ses axes : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$

La force répulsive sera, dans l'espace : $F = k^2 . \overline{PM}$

Soient α, β, γ les coordonnées du point fixe P. Les projections de la force seront: $X = k^2(x-\alpha)$ $Y = k^2(y-\beta)$ $Z = k^2(z-\gamma)$

Les équations de l'équilibre seront alors:

$$k^2(x-\alpha) + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{ou:} \quad \begin{cases} k^2(x-\alpha) + \frac{2\lambda x}{a^2} = 0 \\ k^2(y-\beta) + \frac{2\lambda y}{b^2} = 0 \\ k^2(z-\gamma) + \frac{2\lambda z}{c^2} = 0 \end{cases}$$

Prenons pour inconnue auxiliaire: $\frac{2\lambda}{k^2} = \mu$:

Les équations de l'équilibre deviennent:

$$\begin{cases} x-\alpha + \frac{\mu x}{a^2} = 0 \\ y-\beta + \frac{\mu y}{b^2} = 0 \\ z-\gamma + \frac{\mu z}{c^2} = 0 \end{cases}$$

on a, en les résolvant:

$$x = \frac{\alpha}{1+\frac{\mu}{a^2}} \qquad y = \frac{\beta}{1+\frac{\mu}{b^2}} \qquad z = \frac{\gamma}{1+\frac{\mu}{c^2}}$$

et, en portant ces expressions de x, y, z dans l'équation de l'ellipsoïde:

$$\frac{\alpha^2}{a^2\left(1+\frac{\mu}{a^2}\right)^2} + \frac{\beta^2}{b^2\left(1+\frac{\mu}{b^2}\right)^2} + \frac{\gamma^2}{c^2\left(1+\frac{\mu}{c^2}\right)^2} - 1 = 0$$

équation du 6e degré en μ: elle donne donc 6 valeurs de μ et par suite de λ. — Or le point mobile est posé du côté où f est positive; donc λ doit être positif, ~~L'équation~~ et μ aussi. L'équation en μ a au plus 1 racine positive, car pour $\mu = 0$, le 1er membre se réduit à:

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} - 1$$

et il ne fait que diminuer quand μ augmente; pour μ infini, il devient égal à -1. Il ne s'annule donc qu'une fois pour $\mu > 0$, et encore ne s'annule-t-il que lorsqu'on a: $\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} - 1 > 0$

c.à.d. quand le point P est extérieur; il y a donc alors une position d'équilibre. Quand le point P est intérieur à l'ellipsoïde, il n'y en a aucune, et cela se

conçoit, puisque la force répulsive est alors toujours dirigée vers le extérieur. Quand P est sur le ellipsoïde, il est l'unique position d'équilibre du point M.

— Nous allons étudier le cas où il y a une fonction des forces. Remarquons d'abord qu'on peut toujours exprimer les coordonnées d'un point de la surface en fonction de 2 paramètres variables $q_1\, q_2$:

$$x = \varphi(q_1 q_2) \qquad y = \psi(q_1 q_2) \qquad z = \varpi(q_1 q_2)$$

Pour cela, il suffit d'adjoindre à l'équation de la surface 2 équations en $q_1\, q_2$: $\quad f(x,y,z) = 0 \quad f_1(x,y,z) = q_1 \quad f_2(x,y,z) = q_2$

et de résoudre ce système par rapport à x, y, z. — Nous supposerons dans ce qui suit que le point ne peut quitter la surface d'aucun côté.

Il s'agit de trouver les positions pour lesquelles F est normale à la surface, autrement dit perpendiculaire à 2 déplacements infiniment petits du point mobile sur la surface.

En particulier, faisons varier q_2 seul ; nous déterminons sur la surface une courbe ($q_2 =$ const) dont la tangente en M a pour paramètres directeurs : $\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}$ $\frac{\partial\psi}{\partial q_1}$ $\frac{\partial\varpi}{\partial q_1}$. De même la courbe ($q_1 =$ const) a une tangente en M dont les paramètres directeurs sont : $\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}$, $\frac{\partial\psi}{\partial q_2}$, $\frac{\partial\varpi}{\partial q_2}$.

La force F doit être perpendiculaire à ces 2 directions :

$$X\frac{\partial\varphi}{\partial q_1} + Y\frac{\partial\psi}{\partial q_1} + Z\frac{\partial\psi}{\partial q_1} = 0 \qquad X\frac{\partial\varphi}{\partial q_2} + Y\frac{\partial\psi}{\partial q_2} + Z\frac{\partial\varpi}{\partial q_2} = 0$$

Dans le cas où la force est nulle : $X = 0 \quad Y = 0 \quad Z = 0$

ces 2 équations sont toujours vérifiées ; il y a partout équilibre —

Dans les autres cas, on remplacera $x\, y\, z$ dans $X\, Y\, Z$ par leurs valeurs en $q_1\, q_2$, et on aura 2 équations : $\quad Q_1 = 0 \quad Q_2 = 0$

qui donnent les valeurs de $q_1\, q_2$ qui correspondent à l'équilibre.

Les équations de l'équilibre étant mises sous cette forme, il peut arriver

quoi $Q_1 dq_1 + Q_2 dq_2 = dU(q_1 q_2)$ c. à d. $Q_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1}$ $Q_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2}$

Pour que cela ait lieu, il suffit de la seule condition :

$$\frac{\partial Q_1}{\partial q_2} = \frac{\partial Q_2}{\partial q_1}$$

Il y a dans ce cas une fonction de forces dont les maxima et minima correspondent à des positions d'équilibre du point sur la surface ; et si cette fonction est réellement maximum pour une solution $(q_1 q_2)$ l'équilibre est stable au point correspondant (s'il est assujetti à rester sur la surface.)

On peut montrer que cette fonction de forces équivaut à la fonction de forces définie précédemment. Formons l'expression :

$X dx + Y dy + Z dz$ où $x\, y\, z$ seraient fonctions de $q_1 q_2$;

on aura : $dx = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} dq_2$ $dy = \frac{\partial \psi}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \psi}{\partial q_2} dq_2$ $dz = \frac{\partial \varpi}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \varpi}{\partial q_2} dq_2$

En substituant dans l'expression précédente, on a une fonction linéaire de $dq_1\, dq_2$:

$$\left(X\frac{\partial \varphi}{\partial q_1} + Y\frac{\partial \psi}{\partial q_1} + Z\frac{\partial \varpi}{\partial q_1}\right) dq_1 + \left(X\frac{\partial \varphi}{\partial q_2} + Y\frac{\partial \psi}{\partial q_2} + Z\frac{\partial \varpi}{\partial q_2}\right) dq_2$$
$$= Q_1 dq_1 + Q_2 dq_2$$

S'il y a une fonction de forces $U(x, y, z)$, on a :

$X = \frac{\partial U}{\partial x}$ $Y = \frac{\partial U}{\partial y}$ $Z = \frac{\partial U}{\partial z}$ et : $X dx + Y dy + Z dz = dU(x y z)$

Si l'on remplace x, y, z par leurs expressions en fonction de $q_1 q_2$, on a :

$$Q_1 dq_1 + Q_2 dq_2 = dU(q_1 q_2)$$

Donc, s'il y a une fonction des forces, il suffit de remplacer dans cette fonction $x\, y\, z$ par leurs valeurs en $q_1 q_2$ et de chercher les maxima et minima de la nouvelle fonction de forces en $q_1 q_2$. Aux maxima correspondront des positions d'équilibre stable.

— Équilibre d'un point matériel assujetti à se mouvoir sur une courbe. On composera comme toujours les forces données en une résultante MF.

Pour que le point soit en équilibre, il faut et il suffit que cette force soit normale à la courbe (ou nulle.) car si elle était oblique, on pourrait la décomposer en une composante normale qui serait détruite par la résistance de la courbe, et en une composante tangentielle qui déplacerait le point, puisque par hypothèse il n'y a pas de frottement.

On peut encore ici employer la considération de la réaction normale : la courbe exerce sur le point mobile une action qui se résume en la force MN ; cette force ne peut être que normale, puisque par hypothèse la courbe n'oppose aucune résistance au glissement du point ; il n'y a donc pas de composante tangentielle de la réaction. — Le point peut être considéré comme libre et sollicité à la fois par les 2 forces F et N, car on peut supprimer la courbe en conservant sa réaction N. Donc pour qu'il y ait équilibre, il faut et il suffit qu'on ait :

$$(F) = -(N)$$

ce qui montre que la force doit être normale à la courbe.

Exprimons analytiquement cette condition : soient les équations de la courbe

$$f_1(x, y, z) = 0 \qquad f_2(x, y, z) = 0$$

considérée comme l'intersection des 2 surfaces $f_1 = 0$, $f_2 = 0$. Soient MA_1 MA_2 les normales respectives à ces 2 surfaces au point M ; la réaction normale MN se décompose en 2 composantes N_1 N_2 suivant MA_1, MA_2, car elle est dans leur plan. Le point matériel est en équilibre sous l'action des 3 forces F, N_1, N_2. Or les projections de N_1 sont : $\lambda \frac{\partial f_1}{\partial x}$ $\lambda \frac{\partial f_1}{\partial y}$ $\lambda \frac{\partial f_1}{\partial z}$

et celles de N_2 sont : $\mu \frac{\partial f_2}{\partial x}$ $\mu \frac{\partial f_2}{\partial y}$ $\mu \frac{\partial f_2}{\partial z}$

Les projections de N sont d'ailleurs les sommes des projections correspondantes de N_1, N_2 ; les conditions d'équilibre se traduisent donc par les équations :

$$\begin{cases} X + \lambda \frac{\partial f_1}{\partial x} + \mu \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0 \\ Y + \lambda \frac{\partial f_1}{\partial y} + \mu \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0 \\ Z + \lambda \frac{\partial f_1}{\partial z} + \mu \frac{\partial f_2}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

On a ainsi un système de 5 équations à 5 inconnues : x, y, z, λ, μ.

En les résolvant par rapport à x, y, z, on obtiendra les positions d'équilibre.
— Comme dans le cas précédent, on peut employer une méthode plus simple qui fait dépendre la question de la résolution d'une équation à 1 inconnue. On peut toujours exprimer les coordonnées d'un point de la courbe en fonction d'un paramètre — Il suffirait pour cela d'adjoindre aux 2 équations de la courbe l'équation: $f_2(x, y, z) = q$
et d'~~éliminer~~ en tirer x, y, z: on aurait: $x = \varphi(q) \quad y = \psi(q) \quad z = \varpi(q)$
Les cosinus directeurs de la tangente à la courbe en M sont:

$$\varphi'(q) \qquad \psi'(q) \qquad \varpi'(q)$$

On écrira que la force doit être perpendiculaire à la tangente, et on aura l'unique équation d'équilibre: $X\varphi'(q) + Y\psi'(q) + Z\varpi'(q) = 0$
Le 1er membre, quand on y remplace x, y, z par leurs valeurs en q, devient une fonction de la seule variable q: $\Phi(q) = 0$

Si l'on considère la fonction: $V = \int \Phi(q)\,dq$
la recherche des positions d'équilibre revient à la recherche du maximum et du minimum de V. — A un maximum effectif de V correspondra une position d'équilibre stable.

Quand il y a une fonction des forces, on peut former directement V; on va voir que c'est précisément la fonction des forces. On a en effet:

$$dV(x,y,z) = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

Remplaçons x, y, z par leurs valeurs en q:

$$dV(q) = \left(X\varphi'(q) + Y\psi'(q) + Z\varpi'(q)\right)dq = \Phi(q)\,dq$$

d'où: $V = \int \Phi(q)\,dq$

Ainsi la fonction V de q est ce que devient la fonction des forces $V(x,y,z)$ quand on y remplace x, y, z par leurs valeurs en q.

— Appliquons cette remarque au cas d'un point matériel pesant. Prenons pour axe Oz une verticale dirigée en haut: les projections du poids P seront:

$X = 0 \quad Y = 0 \quad Z = -mg \qquad U = -\int mg\,dz = -mgz$

On cherchera les maxima et minima de U, c.à.d. les minima et maxima de $z = \varpi(q)$. Partout où la dérivée de ϖ s'annule, il y a une position d'équilibre : en ces points, la tangente à la courbe devient horizontale. Il n'y a équilibre stable que quand U est maximum, c.à.d. z minimum : les positions d'équilibre stable sont les points les plus bas de la courbe.

Statique des systèmes.

Un corps solide est un ensemble de points matériels invariablement liés entre eux.

Une force sera dite appliquée au corps solide quand elle sera appliquée à l'un de ses points.

On commencera par étudier les systèmes libres, puis on étudiera les systèmes assujettis à des liaisons.

On admettra comme évidents les 2 principes suivants :

Axiome I. Si un corps solide entièrement libre est sollicité par 2 forces égales et directement opposées, il est en équilibre.

Axiome II. On peut ajouter ou retrancher à un corps solide 2 forces égales et directement opposées sans changer son état (mouvement ou repos.)

Théorème. On peut, sans changer l'état d'un corps solide, transporter une force en un point de sa direction invariablement lié au corps.

En effet soit la force AF ; en A', point de sa direction, appliquons F' égale et parallèle à F, et $-F$ égale et directement opposée à F. On peut supprimer F et $-F$, il reste F', et l'état du corps n'est pas changé : cela revient à transporter AF en $A'F'$.

F A F' A' -F

On peut maintenant démontrer la réciproque de l'axiome I :

Si 2 forces appliquées à un corps solide se font équilibre, elles sont égales et directement opposées.

Soient F et Φ les 2 forces appliquées en 2 points du corps; il est en équilibre, c.à d. immobile sous l'action de ces 2 forces, étant d'ailleurs entièrement libre. Fixons un point O quelconque de F: le corps reste évidemment en équilibre. Alors la force F est détruite par la résistance du point O, car on peut l'y appliquer. La force Φ reste seule et ferait tourner le corps, à moins qu'elle ne passe aussi par le point fixe O. Or le corps est immobile par hypothèse: donc Φ passe par O; or ce point est un point quelconque de F, donc la direction F doit coïncider avec la direction Φ. On peut alors transporter Φ en O, où se trouve appliquée F: or on sait que 2 forces qui, appliquées au même point matériel, se font équilibre sont égales et directement opposées, c.q.f.d.

Corollaire. On peut, sans changer l'état d'un corps solide, effectuer sur les forces qui lui sont appliquées les 3 opérations élémentaires suivantes:

1° Ajouter ou retrancher 2 forces égales et directement opposées.

2° Transporter une force en un point quelconque de sa direction.

3° ~~Trans~~ ~~Composer~~ Remplacer plusieurs forces concourantes par leur résultante ou une force unique par ses composantes.

Les 2 premières parties sont déjà démontrées. Pour la 3e, on peut transporter les forces concourantes en leur point de concours; elles seront appliquées à un même point matériel et on pourra les composer suivant les règles connues.

— Or on a vu que si l'on effectue sur un système de vecteurs ces opérations élémentaires, on obtient toujours des systèmes équivalents au premier, c.à d. ayant même résultante générale et même moment résultant, et que réciproquement, tous les systèmes équivalents à un système donné peuvent s'en déduire par les opérations élémentaires. Il en résulte que tous les

systèmes de forces qui, comme systèmes de vecteurs, sont équivalents, ont les mêmes effets sur le corps solide auquel ils s'appliquent, et par conséquent sont dynamiquement équivalents. Dès lors tous les théorèmes de la théorie des vecteurs s'appliquent aux forces. On va en énoncer les principaux.

— Toutes les forces appliquées à un corps solide sont équivalentes à un système de 2 forces dont l'une est appliquée en un point arbitraire donné. Cette réduction comporte une infinité de solutions pour un même point donné.

— Pour que les forces appliquées à un corps solide se fassent équilibre, il faut et il suffit que les 2 forces résultantes F et Φ se fassent équilibre, c.à.d soient égales et directement opposées. On peut alors les supprimer, et le système des forces données se trouve annulé; on peut dire qu'il est équivalent à zéro. Sa résultante générale est nulle, ainsi que son moment résultant par rapport à un point quelconque.

On a montré plus haut que si 2 systèmes de forces sont des systèmes de vecteurs équivalents, ils produisent le même effet sur le corps solide et peuvent se remplacer. Réciproquement, si 2 systèmes de forces ont le même effet sur un corps solide entièrement libre, ils sont équivalents géométriquement c.à.d ont même résultante générale et même moment résultant.

En effet, soient S et S' les 2 systèmes dynamiquement équivalents. S et $(-S)$ se font évidemment équilibre, car le système $S+(-S)$ ne contient que des forces égales et directement opposées deux à deux. Mais S' et $(-S)$ se font également équilibre, donc le système $S'+(-S)$ est équivalent à zéro: sa résultante générale et son moment résultant sont nuls, ce qui revient à dire que les systèmes S et S' ont même résultante générale et même moment résultant, c.q.f.d.

— On peut encore, avec Poinsot, réduire un système de forces appliquées à un corps solide à une force unique égale à la résultante générale du

système appliqué en un point arbitraire, et à un couple dont l'axe est le moment résultant par rapport au même point.

Soit OR la résultante générale, OG le moment résultant en O; prenons un couple P, −P ayant pour axe OG: le système de forces peut être remplacé par les 3 forces R, P, −P. En effet, ces 2 systèmes sont équivalents: ils ont même résultante générale et même moment résultant par rapport au point O.

On peut rattacher cette réduction à la précédente: soient F et Φ les 2 forces résultantes, F étant appliqué au point O: appliquons en O les 2 forces Φ' et −Φ égales et parallèles à Φ et directement opposées. Φ' et F se composent en OR, résultante générale, et Φ et −Φ forment un couple ayant pour axe OG, le moment résultant.

On sait comment varient dans l'espace les éléments de la réduction de Poinsot: la résultante générale est constante en grandeur et en direction; la projection du moment résultant sur la résultante générale est la même partout: $G \cos(R, G) = \text{const.}$

Sur l'axe central du système, le moment résultant est:

$O'g = G \cos(R, G)$ et coïncide avec la direction de OR.

On peut donc toujours réduire un système de forces à une force unique et à un couple dont l'axe coïncide avec la direction de la force unique

$O'g = \text{const.}$ est l'axe du couple minimum

Dans certains cas particuliers, le système se réduit à une résultante unique; pour que cela ait lieu, il faut et il suffit que l'axe du couple minimum soit nul: $O'g = G \times \cos(R, G) = 0.$

Il suffit encore d'exprimer qu'en un point quelconque l'angle GOR est droit.
Dans le cas particulier où la résultante générale est nulle, le système se réduit à un couple seulement.
Enfin, pour qu'il y ait équilibre il faut et il suffit qu'on ait à la fois:
$R = 0$ $G = 0$ Traduisons analytiqᵗ ces conditions:

$$X = \Sigma X_1 = 0 \qquad L = \Sigma L_1 = \Sigma(y_1 Z_1 - z_1 Y_1) = 0$$
$$Y = \Sigma Y_1 = 0 \qquad M = \Sigma M_1 = \Sigma(z_1 X_1 - x_1 Z_1) = 0$$
$$Z = \Sigma Z_1 = 0 \qquad N = \Sigma N_1 = \Sigma(x_1 Y_1 - y_1 X_1) = 0$$

Telles sont les 6 équations de l'équilibre. Résumons les cas particuliers:
Si $X^2 + Y^2 + Z^2 > 0$ et $LX + MY + NZ \gtrless 0$
le système se réduit à une force et à (c.à.d. $RG \cos(R, G) \gtrless 0$)
un couple, c.à.d, sur l'axe central, à un torseur dirigé suivant l'axe central.
Si $X^2 + Y^2 + Z^2 > 0$, et $LX + MY + NZ = 0$
Le couple minimum est nul, le système se réduit à une force unique sur l'axe central.
Si $R = 0$ $G \gtrless 0$ c.à.d. $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$ $L^2 + M^2 + N^2 > 0$
le système se réduit à un couple unique, le même en tous les points de l'espace.
Enfin, si: $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$ $L^2 + M^2 + N^2 = 0$
c.à.d si: $X = Y = Z = 0$ $L = M = N = 0$
il y a équilibre, on retrouve ainsi les 6 équations de l'équilibre d'un corps solide entièrement libre.

— Cas des forces parallèles. — Soient des forces $P_1, P_2, \ldots\ldots P_n$ parallèles à la direction issue de O qui a pour cosinus directeurs α, β, γ.
On donnera un signe aux intensités de ces forces, suivant qu'elles seront de

même sens que $O(\alpha\beta\gamma)$ ou de sens contraire. Lorsque $\Sigma P_1 \gtrless 0$, ces forces ont une résultante unique sur l'axe central, et en particulier au point A, centre des forces parallèles, dont les coordonnées sont :

$$x = \frac{\Sigma P_1 x_1}{\Sigma P_1} \qquad y = \frac{\Sigma P_1 y_1}{\Sigma P_1} \qquad z = \frac{\Sigma P_1 z_1}{\Sigma P_1}$$

On sait que la résultante passe toujours par A quelle que soit l'orientation des forces parallèles, c.à.d la direction $(\alpha\beta\gamma)$

Lorsque : $\Sigma P_1 = 0$, le système se réduit en général à un couple seul. Pour qu'il y ait équilibre, il faut qu'on ait dans ce cas (v. page 25) :

$$\frac{\Sigma P_1 x_1}{\alpha} = \frac{\Sigma P_1 y_1}{\beta} = \frac{\Sigma P_1 z_1}{\gamma}$$ ce qui fait 3 conditions.

Enfin pour qu'il y ait équilibre quelle que soit la direction $(\alpha\beta\gamma)$ il faut qu'on ait à la fois : $\Sigma P_1 = 0 \quad \Sigma P_1 x_1 = 0 \quad \Sigma P_1 y_1 = 0 \quad \Sigma P_1 z_1 = 0$ ce qui fait 4 conditions.

On pourrait retrouver directement ce résultat par la géométrie : puisque $\Sigma P_1 = 0$, les forces positives ont pour résultante P, les forces négatives ont pour résultante $-P$; ces 2 forces forment un couple, et pour qu'il y ait équilibre, il faut que le bras de levier soit parallèle à $(\alpha\beta\gamma)$: car alors le moment résultant est perpendiculaire à la résultante générale et s'annule sur l'axe central. On peut dire alors que le centre des forces parallèles s'éloigne à l'infini.

— Cas particulier où les forces données sont dans un même plan

Prenons ce plan pour plan des xy ; on aura : $Z = 0,\ L = 0,\ M = 0$.

Il reste les quantités : $X = \Sigma X_1 \quad Y = \Sigma Y_1 \quad N = \Sigma(x_1 Y_1 - y_1 X_1)$

N est le moment résultant par rapport à Oz, donc par rapport à O, car le moment résultant dans l'espace coïncide avec Oz. On a toujours :

$$LX + MY + NZ = 0$$

donc le système ne donne jamais lieu à une résultante et un couple à la fois sur l'axe central

Si: $X^2+Y^2>0$, on a une résultante unique dirigée suivant l'axe central, qui est dans le plan des forces, puisque la résultante générale y est.
Si $X=Y=0$, mais $N \gtrless 0$, on a un couple unique situé dans le plan des forces, puisque son axe N est perpendiculaire à ce plan.
Enfin si : $X=0$, $Y=0$, $N=0$, il y a équilibre.
On voit que dans ce cas il y a 3 équations de l'équilibre, et que la réduction du système ne donne jamais lieu à un torseur.

- Si l'on sait seulement que $N=0$, ou bien la résultante générale est nulle, ou bien elle passe par l'origine. Si l'on sait de plus que le moment résultant par rapport au p. O' est nul, ou bien la résultante générale est nulle, ou bien elle passe par O', c.à.d. coïncide avec OO'. Si l'on sait encore que le moment résultant par rapport au p. O'' non situé sur OO' est nul, on peut affirmer que la résultante est nulle, car elle ne peut passer à la fois par O, O', O''. Donc, pour exprimer qu'un système de forces situées dans un plan est en équilibre on peut écrire que le moment résultant par rapport à 3 points non en ligne droite est nul : cela fait encore 3 conditions de l'équilibre.

— Théorème. Étant donné un tétraèdre (dont un sommet peut être à l'infini) on peut remplacer toutes les forces appliquées au corps solide par 6 forces dirigées suivant les arêtes de ce tétraèdre (invariablement lié au corps.)
Soit une des forces données F : elle rencontre nécessairement une des faces, par exemple ABC, en O ; joignons O aux 4 sommets ; 3 de ces droites forment un trièdre, soit $OABD$. Transportons la force F en O, décomposons-la suivant OA, OB, OD.

Transportons ces 3 composantes en A, B, D et décomposons chacune d'elles en 3 forces appliquées sur les 3 arêtes issues du sommet correspondant; il y aura 9 nouvelles composantes, soit 1 sur AC, BC, DC, et 2 sur AB, BC, AC: ces dernières se composeront entre elles et il restera 6 composantes, une sur chaque arête, représentant la force F. On décomposera de même toutes les forces données, et on fera la somme algébrique de leurs composantes sur chaque arête; on aura ainsi les 6 forces résultantes.

– Pour que le système donné soit en équilibre, il faut et il suffit que les 6 résultantes soient nulles (ce qui fait 6 conditions.) La condition est évidemment suffisante; reste à prouver qu'elle est nécessaire.

Prenons le moment du système par rapport à l'axe CD par exemple: il doit être nul pour qu'il y ait équilibre. Ce moment est égal à la somme des moments des 6 forces par rapport à CD; or 5 de ces forces passent par C ou D, donc leurs moments sont nuls; il reste la force sur AB, dont le moment doit être aussi nul: $F.\delta.\sin(AB, CD) = 0$

Or l'angle des 2 arêtes opposées n'est pas nul, puisque le tétraèdre existe; la plus courte distance de ces arêtes n'est pas nulle non plus; donc F est nulle. On verrait de même que chacune des 6 forces dirigées suivant les arêtes du tétraèdre doit être nulle, c.q.f.d.

Autre énoncé du même théorème: pour qu'il y ait équilibre, il faut et il suffit que la somme des moments des forces données par rapport aux 6 arêtes du tétraèdre soit nulle.

En effet, si la somme des moments par rapport à CD est nulle, il faut que la force sur AB soit nulle, et réciproquement.

– Théorème. Si l'on applique aux 4 sommets d'un tétraèdre des forces perpendiculaires aux faces opposées et proportionnelles aux aires de ces faces, elles se font équilibre, pourvu qu'elles soient toutes dirigées dans le même sens

par rapport aux faces correspondantes.
Soient les forces $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ appliquées respectivement en A, B, C, D.
Pour démontrer qu'elles se font équilibre, il suffira de prouver que la somme de leurs moments par rapport à chacune des 6 arêtes est nulle — Considérons leurs moments par rapport à AB : ceux de α, β sont évidemment nuls ; on n'a donc à considérer que γ et δ.

Prolongeons δ jusqu'à la face opposée, en DP : c'est la hauteur du tétraèdre relative à cette face ; abaissons PD' perpendiculaire sur AB, joignons DD' : c'est la hauteur du triangle ABD, et PD' est la plus courte distance de δ et de AB — Menons de même CQ hauteur du tétraèdre, QC' perpendiculaire à AB, CC' hauteur du tr. ABC ; QC' est la plus courte distance de γ et de AB : donc

$$\text{mom. } \delta = \delta . \overline{PD'}$$
$$\text{mom. } \gamma = \gamma . \overline{QC'}$$

Comme ces moments sont de signes contraires, on doit avoir :

$$\delta . \overline{PD'} - \gamma . \overline{QC'} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\delta}{\gamma} = \frac{QC'}{PD'}$$

Or γ et δ sont proportionnelles aux triangles ABD, ABC de même base c.à.d. à leurs hauteurs ; $\frac{\delta}{\gamma} = \frac{CC'}{DD'}$

D'autre part, les 2 triangles rectangles CQC', DPD' sont semblables, les 2 angles C', D' étant égaux ; donc $\frac{CC'}{DD'} = \frac{QC'}{PD'}$

On en conclut $\frac{\delta}{\gamma} = \frac{QC'}{PD'}$ c.q.f.d

On pourrait répéter le même raisonnement pour une arête quelconque,

le théorème est donc démontré.

On pourrait formuler un théorème analogue, mais plus simple, pour le triangle : les 3 forces concourraient, car ce sont les 3 hauteurs du triangle ; d'ailleurs elles se font équilibre, car chacune est proportionnelle au sinus de l'angle des 2 autres (comme les côtés du triangle.)

– Examinons différents cas particuliers. Nous savons que dans le cas de 2 forces appliquées à un corps solide, il y a équilibre quand elles sont égales et directement opposées.

Dans le cas où le corps est sollicité par 3 forces, F_1, F_2, F_3, pour qu'il y ait équilibre, il faut que les 3 forces soient dans un même plan. En effet, considérons une droite quelconque s'appuyant sur 2 d'entre elles ; la somme des moments par rapport à cette droite doit être nulle ; donc F_3 est dans un même plan avec cette droite. Mais comme cette droite est quelconque, F_3 doit être dans un même plan avec $F_1 F_2$ – car par O point de F_1 on pourra mener une infinité de droites passant par F_2, donc F_3 sera dans le plan de O et de F_2 ; elle doit être également dans le plan de F_1 et de P, point quelconque de F_2 ; donc F_1 F_2 F_3 doivent être dans un même plan.

$(F_1 F_2)$

F_3 O P F_1 F_2

Si les 3 forces ne sont pas parallèles, 2 d'entre elles, F_1 et F_2, se coupent en un point P : composons-les, et soit PR leur résultante ; le corps est soumis à 2 forces R, F_3 et est en équilibre ; donc F_3 est égale et directement opposée à R, et par suite elle passe par P. Ainsi pour que 3 forces appliquées à un corps se fassent équilibre, il faut et il suffit qu'elles concourent en un même point et que chacune d'elles soit égale et directement opposée à la résultante des 2 autres (ou proportionnelle au sinus de leur angle.)

F_1 F_3 P R F_2

Si les 3 forces données sont parallèles, 2 d'entre elles seront de même sens; on les composera encore en une seule R; F_3 doit être égale et directement opposée à R. Donc, en résumant ces 2 cas, pour que 3 forces appliquées à un corps se fassent équilibre, il faut et il suffit qu'elles soient concourantes ou parallèles, et que l'une d'elles soit égale et directement opposée à la résultante des 2 autres.

Soit un corps sollicité par 4 forces; on suppose qu'elles ne sont pas deux à deux dans le même plan, sans quoi le système se réduirait à 3 forces ou moins. Pour qu'il y ait équilibre, il faut d'abord que la résultante générale soit nulle. Imaginons une droite s'appuyant sur F_1, F_2, F_3: la somme des moments par rapport à cette droite doit être nulle, donc F_4 doit être dans un même plan avec cette droite. Or cette droite en se déplaçant sur les 3 droites engendre une surface réglée du 2e ordre. Donc les 4 forces sont 4 génératrices de même système d'une surface réglée du 2e ordre (hyperboloïde à une nappe ou paraboloïde hyperbolique).

Réciproquement, si l'on prend 4 génératrices de même système d'une surface du 2e ordre, on peut disposer sur elles 4 forces qui se fassent équilibre.

Soient d'abord 4 génératrices d'un hyperboloïde: par un point O de l'espace menons 4 droites parallèles à ces génératrices. Portons un vecteur arbitraire OP_1 sur l'une; ~~et de~~ portons-en un égal et opposé sur la même, et décomposons-le en 3 vecteurs suivant les 3 autres droites: le système de ces 4 vecteurs est équivalent à zéro. Transportons ces vecteurs avec leur sens sur les génératrices correspondantes; les 4 forces ainsi définies se font équilibre. En effet, leur résultante générale est nulle par construction; leur moment

résultant est donc le même en tous les points de l'espace. Prenons une génératrice quelconque de l'autre système ; la somme des moments par rapport à cette droite est nulle ; donc le moment résultant par rapport à un point de cette droite est nul ou perpendiculaire à cette génératrice. Mais dans cette seconde hypothèse, le moment résultant devrait être perpendiculaire à la fois à toutes les génératrices du 2e système, ce qui est impossible, puisque ces génératrices sont parallèles à celles d'un cône. Donc le moment résultant est nul, c. q. f. d.

Cette démonstration ne s'applique pas à un paraboloïde, car alors toutes les génératrices sont parallèles à un plan directeur. Mais alors on pourrait prendre arbitrairement 2 vecteurs P_1, P_2 et déterminer les 2 autres de manière à ce qu'ils se fassent équilibre, puisqu'ils sont dans un même plan. On montrerait comme ci-dessus que le moment résultant doit être perpendiculaire à toutes les génératrices, c.à.d. au plan directeur. Il aurait pour expression

$\alpha F_1 + \beta F_2$ α, β étant des coefficients constants. Mais alors on pourrait disposer de $F_1\ F_2$ (ou $P_1\ P_2$) pour annuler ce moment et obtenir l'équilibre ; le théorème est encore démontré.

Dans le cas de 5 forces appliquées à un corps solide, on démontre que pour qu'elles se fassent équilibre, il faut et il suffit que les 2 droites qui rencontrent les 4 premières rencontrent aussi la 5e, et que leur résultante générale soit nulle.

Du théorème démontré plus haut touchant le tétraèdre on peut conclure le corollaire suivant :

Les 4 hauteurs d'un tétraèdre sont 4 génératrices de même système d'une surface du 2e degré.

Théorème. Si sur les milieux des côtés d'un polygone plan on applique des forces perpendiculaires à ces côtés, proportionnelles à leur longueur et dirigées dans le même sens par rapport au polygone, elles se font équilibre

On démontre d'abord le théorème pour un triangle : on voit que les 3 forces sont concourantes, et que chacune d'elles est proportionnelle au sinus de l'angle des 2 autres.

On démontre ensuite que si le théorème est vrai pour un polygone de $(n-1)$ côtés, il l'est encore pour un polygone de n côtés. Soit ABCD....K ce polygone de n côtés – Menons la diagonale AC, et appliquons en son milieu 2 forces égales et opposées, perpendiculaires à AC et proportionnelles à sa longueur, P et −P. −P fait équilibre aux forces appliquées sur les 2 autres côtés du triangle ABC : on peut donc supprimer ces 3 forces et le triangle lui-même. Il reste un polygone de $(n-1)$ côtés : il est en équilibre par hypothèse ; donc le polygone de n côtés était aussi en équilibre sous les forces données.

On peut démontrer une proposition analogue touchant les polyèdres :

– Si sur les faces d'un polyèdre on applique en leurs centres de gravité des forces perpendiculaires à ces faces et proportionnelles à leurs aires, et dirigées dans le même sens par rapport au polyèdre, le système de ces forces est en équilibre.

On démontre d'abord le théorème pour le tétraèdre ; les centres de gravité des faces sont les points de concours de leurs médianes, A', B', C', D'.

On considère le tétraèdre A'B'C'D' semblable au symétrique du premier ; ses faces sont parallèles et proportionnelles à celles du premier ; donc les forces $\alpha \beta \gamma \delta$ appliquées en ses sommets se font équilibre – On étend ensuite le théorème aux polyèdres, qui sont composés de tétraèdres –

Théorie du centre de gravité.

Un système de forces parallèles a toujours une résultante quand $\Sigma F \gtrless 0$, et cette résultante est appliquée au centre des forces parallèles quelle que soit leur direction.

D'autre part, on a défini le poids du point matériel : c'est un vecteur vertical dirigé vers le bas, et égal au produit de la masse du point par l'accélération due à la pesanteur. Les poids de tous les points matériels d'un corps de dimensions ordinaires peuvent être considérés comme parallèles, et g (accélération due à la pesanteur) est la même pour tous ; donc les poids des points du corps sont proportionnels à leurs masses, et le poids total du corps est : $P = \Sigma p = \Sigma mg = Mg$

M étant la masse totale du corps — Or pour toute position du corps dans l'espace le poids total P passera par un point invariablement lié au corps. Ce point est appelé le centre de gravité du corps ; c'est le centre des forces parallèles qui sont les poids des points du corps : $p_1\ p_2\ p_3 \ldots p_n$.

On a pour les coordonnées du centre de gravité G :

$$\xi = \frac{\Sigma p_1 x_1}{\Sigma p_1} \qquad \eta = \frac{\Sigma p_1 y_1}{\Sigma p_1} \qquad \zeta = \frac{\Sigma p_1 z_1}{\Sigma p_1}$$

ou, en supprimant le facteur g, et réduisant les poids aux masses :

$$\xi = \frac{\Sigma m_1 x_1}{\Sigma m_1} \qquad \eta = \frac{\Sigma m_1 y_1}{\Sigma m_1} \qquad \zeta = \frac{\Sigma m_1 z_1}{\Sigma m_1}$$

$\Sigma m_1 = M$ — — Ces dernières formules dégagent la définition du centre de gravité de la notion de pesanteur, en le faisant dépendre uniquement des coordonnées des points du corps et de leurs masses. Ainsi on pourra parler du ~~centre~~ de gravité d'un système non pesant, et qui ne serait pas un corps.

Théorème. Le centre de gravité d'un système se trouve à l'intérieur de toute surface convexe qui enferme tous les points du système.

En effet, si l'on prend pour plan des xy un des plans tangents à cette surface tous les points du système seront du même côté de ce plan (par la définition de la convexité) z_1 z_2 . . . . z_n seront tous positifs, donc $\zeta > 0$; le centre de gravité sera situé du même côté du plan que le système entier; cela étant vrai pour un plan quelconque tangent à la surface, le centre de gravité se trouve à l'intérieur de cette surface qui contient le système.

— Supposons que le système se compose de 2 parties dont on connaît les masses et les centres de gravité: leurs poids respectifs sont

$P_1 = M_1 g$ appliqué en G_1, $P_2 = M_2 g$ appliqué en G_2

Pour avoir le centre de gravité du système, il suffit de composer P_1, P_2, c à d. de déterminer le centre de gravité des 2 masses M_1 M_2 situées aux points G_1 G_2 — On raisonnerait de même pour un système composé de K parties ayant pour masses M_1 M_2 . . . . M_K et pour centres de gravité $G_1(x_1 y_1 z_1)$ $G_2(x_2 y_2 z_2)$ . . . . . $G_K(x_K y_K z_K)$. Le centre de gravité du système aura pour coordonnées:

$$\xi = \frac{\Sigma M_1 x_1}{\Sigma M_1} \qquad \eta = \frac{\Sigma M_1 y_1}{\Sigma M_1} \qquad \zeta = \frac{\Sigma M_1 z_1}{\Sigma M_1}$$

Ce théorème sert à trouver le centre de gravité des corps continus. En effet comme il est impossible de faire la somme des quantités $m_1 x_1$, $m_1 y_1$, $m_1 z_1$, relatives à chaque point du corps, on suppose que la matière (c à d. la masse) est répartie d'une manière continue à l'intérieur du corps. On décompose alors son volume en éléments infiniment petits; chacun d'eux a une masse élémentaire, et on peut placer son centre de gravité en un point quelconque de son intérieur: on intégrera les masses élémentaires dans l'étendue du corps, et on aura des intégrales triples qui donneront les coordonnées du centre de gravité.

On peut simplifier le problème dans certains cas particuliers où l'on peut

négliger une ou deux dimensions du corps comme infiniment petites par rapport aux autres : on cherche alors le centre de gravité d'une surface ou d'une courbe.

Soit une courbe, ou un corps dont une dimension est infiniment grande par rapport aux autres : soit PP' un segment d'arc, m sa masse ; on appelle densité moyenne du segment le rapport : $\frac{m}{PP'}$.

Si ce rapport est constant pour tous les segments de la courbe, sa densité est la même partout, on dit que le corps est homogène.

Si ce rapport n'est pas constant, on appelle densité du point P la limite du rapport $\frac{m}{PP'}$ quand le p. P' tend vers P : on admet que cette limite existe, soit ρ, et qu'on la connaisse pour tous les points de la courbe ; elle sera fonction de l'arc. $\rho = f(s)$

Prenons en P un élément d'arc ds : on a par définition : $\rho = \frac{dm}{ds}$

$dm = \rho ds$ Soient x, y, z les coordonnées du p. P ; on aura pour coordonnées du centre de gravité de la courbe :

$$\xi = \frac{\int \rho x ds}{\int \rho ds} \qquad \eta = \frac{\int \rho y ds}{\int \rho ds} \qquad \zeta = \frac{\int \rho z ds}{\int \rho ds}$$

On connaîtra le centre de gravité en effectuant 4 intégrales simples. On peut exprimer les quantités à intégrer en fonction d'un seul paramètre, s par exemple : on sera ramené à des quadratures.

Quand la courbe est homogène, ρ constante sort des intégrales et disparaît comme facteur commun. Le centre de gravité est alors entièrement défini par des données géométriques. On aura pour dénominateur : $\int ds = l$

$$l\xi = \int x ds \qquad l\eta = \int y ds \qquad l\zeta = \int z ds$$

Théorème de Guldin. L'aire engendrée par une courbe plane tournant autour d'un axe situé dans son plan et ne la traversant pas, est

égale au produit de la longueur de la courbe par la longueur de la circonférence décrite par son centre de gravité (la courbe supposée homogène)

Soit AB la courbe tournant autour de l'axe des x; prenons l'élément ds, soit y l'ordonnée de son milieu. L'aire élémentaire engendrée par ds sera la surface latérale d'un tronc de cône: $2\pi y\,ds$

La surface totale sera la somme des aires élémentaires;

$$S = \int 2\pi y\,ds = 2\pi \int y\,ds$$

Or soit G le centre de gravité de la courbe, η son ordonnée; on sait que: $l\eta = \int y\,ds$ l étant la longueur de l'arc limité AB.

Donc: $S = 2\pi l\eta = l \times 2\pi\eta$ c. q. f. d

Si la courbe traverse l'axe, cette expression représente, non plus la surface totale, mais la différence entre la surface engendrée par la partie positive de la courbe et la surface engendrée par la partie négative: car dans $\int y\,ds$, les éléments relatifs à cette dernière partie deviennent négatifs.

Corollaire. Si l'on fait tourner une courbe plane autour d'un axe situé dans son plan et passant par son centre de gravité, la surface engendrée par la partie supérieure à l'axe est équivalente à la surface engendrée par la partie inférieure.

Le théorème de Guldin permet de calculer la surface, connaissant le centre de gravité; le corollaire permet inversement de trouver le centre de gravité quand on sait que les surfaces engendrées par les 2 parties de la courbe sont équivalentes.

— Remarque. Les formules du centre de gravité que nous venons d'obtenir subsistent dans un système de coordonnées obliques. Considérons par exemple la 1re: $\xi = \dfrac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i}$

Nous avons supposé l'axe des x perpendiculaire

au plan des (yz) : la coordonnée x_1 est alors la perpendiculaire abaissée du pt M_1 sur ce plan. Prenons à présent pour axe Ox' qui fait l'angle α avec Ox : la coordonnée nouvelle x'_1 est la parallèle menée par M_1 à Ox' ; donc

$$x'_1 = x_1 \cos\alpha \qquad \xi = \xi' \cos\alpha$$

Or : $\xi = \dfrac{\Sigma m x'_1 \cos\alpha}{\Sigma m}$ Donc : $\xi' = \dfrac{\Sigma m x'_1}{\Sigma m}$

On montrerait de même que les autres formules restent identiques.

Soit maintenant une surface, c.à.d. un corps dont une dimension est infiniment petite ; on suppose la matière répartie d'une manière continue sur cette surface. Considérons un point P de la surface : entourons-le d'une courbe fermée quelconque, qui détache sur la surface l'aire σ ; soit m la masse de cette aire ; on appelle densité moyenne de cette aire le rapport $\dfrac{m}{\sigma}$. Si ce rapport est le même quel que soit le contour de l'aire, la densité de la surface est constante, et la surface est dite homogène. Si le rapport n'est pas constant, on appelle densité au point P la limite vers laquelle il tend quand la courbe fermée se réduit au point P. On admet que cette limite existe : soit ρ ; on la suppose donnée avec la surface c.à.d. connue en chaque point ; ce sera une fonction des 2 paramètres qui définissent le point P.

Prenons autour de P un élément superficiel infiniment petit $d\sigma$; soit dm sa masse ; on a par définition : $\rho = \dfrac{dm}{d\sigma}$ $\quad dm = \rho\, d\sigma$.

On peut considérer P comme le centre de gravité de cet élément ; on aura donc, en faisant la somme de tous les éléments semblables de la surface :

$$\xi = \frac{\iint x\rho\, d\sigma}{\iint \rho\, d\sigma} \qquad \eta = \frac{\iint y\rho\, d\sigma}{\iint \rho\, d\sigma} \qquad \zeta = \frac{\iint z\rho\, d\sigma}{\iint \rho\, d\sigma}$$

les intégrales doubles étant étendues à toute la surface considérée. On exprimera $d\sigma$ en fonction des 2 paramètres qui définissent le point P. On peut par exemple fixer le point P par les 2 coordonnées x, y : son z sera connu par l'équation de la surface : $f(x, y, z) = 0$.

Projetons la surface sur le plan des (xy) ; prenons dans cette projection un élément de surface rectangulaire d'aire $dxdy$, et soit $d\sigma$ l'élément correspondant de la surface donnée. Soit γ le cosinus de l'angle de la normale à $d\sigma$ avec l'axe des z ; on a : $dxdy = \gamma d\sigma$ d'où :

$$d\sigma = \frac{dxdy}{\gamma} \qquad \text{Or : } \gamma = \sqrt{1+p^2+q^2} \qquad d\sigma = \sqrt{1+p^2+q^2}\, dxdy$$

En remplaçant $d\sigma$ par cette expression, on aura des intégrales doubles en dx, dy étendues à tous les points de la projection de la surface sur le plan des (x, y)

$\iint \rho\, d\sigma$ représentera la masse totale de la surface.

Quand la surface est homogène, ρ facteur constant sort des intégrales et disparaît ; le centre de gravité n'est plus défini que par des éléments géométriques. On a alors

$$\iint d\sigma = S \quad \text{surface totale.}$$

$$S\xi = \iint x\, d\sigma \qquad S\eta = \iint y\, d\sigma \qquad S\zeta = \iint z\, d\sigma$$

Cas particulier des aires planes. Le centre de gravité est évidemment dans le plan même de l'aire. Supposons 2 axes dans ce plan faisant entre eux l'angle θ ;

$d\sigma = dxdy \sin\theta$ On a : $\zeta = 0$ puisque tous les z sont nuls.

Quant aux autres coordonnées ξ, η du centre de gravité, $\sin\theta$ en disparaît comme facteur constant, donc elles sont indépendantes de l'angle des axes.

Dans le cas où la surface plane est homogène (ρ = const.) on peut ramener les 3 intégrales doubles à des intégrales simples. On a à calculer :

$$S = \sin\theta \iint dx\,dy \qquad S\xi = \sin\theta \iint x\,dx\,dy \qquad S\eta = \sin\theta \iint y\,dx\,dy$$

Faisons abstraction du facteur $\sin\theta$ qui disparaît, c.à.d. supposons les axes rectangulaires. Considérons l'aire comprise entre 2 parallèles à Oy, d'abscisses x_0 et x_1, et 2 courbes :

$$y_2 = f_2(x) \qquad y_1 = f_1(x)$$

par rapport à y et par rapport à x :

On pourra intégrer successivement

$$S = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_1}^{y_2} dy$$

Intégrons par rapport à y en laissant x constant ; le point M décrira l'ordonnée d'abscisse x entre y_1 et y_2 :

$$S = \int_{x_0}^{x_1} (y_2 - y_1)\,dx$$

On n'aura qu'à intégrer de x_0 à x_1 pour obtenir l'aire totale, puisqu'alors l'ordonnée variable x balaiera la surface entière de x_0 à x_1. — On aura de même :

$$S\xi = \int_{x_0}^{x_1} x\,dx \int_{y_1}^{y_2} dy = \int_{x_0}^{x_1} x(y_2 - y_1)\,dx$$

La 3e est un peu différente :

$$S\eta = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_1}^{y_2} y\,dy = \int_{x_0}^{x_1} dx\,\frac{y_2^2 - y_1^2}{2} = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} (y_2^2 - y_1^2)\,dx$$

Comme y_1, y_2 sont exprimés en fonction de x, on est ramené aux quadratures. On pourrait obtenir géométriquement le même résultat en décomposant l'aire en tranches parallèles à Oy, de largeur dx, et en prenant leur milieu pour leur centre de gravité.

Corollaire. Si une surface plane homogène admet un diamètre conjugué d'une certaine direction de cordes, son centre de gravité se trouve sur ce diamètre.

En effet, on pourra prendre ce diamètre pour axe des x, et la direction des cordes pour axe des y: on aura: $y_2 = -y_1$ $y_2^2 = y_1^2$ $\eta = 0$.
Ce résultat est facile à prévoir géométriquement sans recourir aux formules, car les centres de gravité des tranches de la surface ont précisément pour lieu le diamètre conjugué des cordes qui limitent ces tranches.

En particulier, dans un triangle, les 3 médianes sont chacune le lieu du centre de gravité; donc le centre de gravité d'un triangle est le point de concours de ses médianes.

<u>Corollaire</u>. Le centre de gravité d'un triangle est le centre de gravité de 3 masses égales situées aux 3 sommets; ou encore: le poids P d'un triangle est la résultante de 3 poids égaux à $\frac{P}{3}$ appliqués aux 3 sommets.
On en conclut que le centre de gravité partage chaque médiane dans le rapport de 2 à 1.

On peut trouver le centre de gravité d'un polygone quelconque en le décomposant en triangles.

Dans un trapèze de bases B et b, le centre de gravité se trouve sur la droite qui joint les milieux des bases, et il la divise dans le rapport:

$$\frac{2B+b}{2b+B}$$

<u>Théorème de Guldin</u>. Le volume engendré par une aire plane tournant autour d'un axe situé dans son plan et ne la traversant pas, est égal à l'aire multipliée par la circonférence que décrit le centre de gravité de la surface supposée homogène.

Prenons pour Ox l'axe de rotation: l'aire S sera contenue dans le plan des (xy). Prenons-y un élément superficiel rectangulaire dont les dimensions sont dx, dy, et l'aire: $dxdy$; le volume élémentaire engendré par sa rotation est représenté par: $2\pi y dxdy$.

En effet, le rectangle ABPQ engendre en tournant un cylindre de hauteur dx, dont le volume est: $\pi y^2 dx$.
L'accroissement infiniment petit de ce cylindre pour un accroissement de y est la différentielle de cette expression par rapport à y; $2\pi y dx dy$.

Donc le volume total est:

$$V = 2\pi \iint y dx dy$$

intégrale double étendue à toute l'aire plane S.

Or, soit G le centre de gravité de cette surface supposée homogène, η son ordonnée; on sait que: $S\eta = \iint y dx dy$

Donc: $V = 2\pi\eta . S$ c. q. f. d.

Si l'axe des x (axe de rotation) traversait la surface S, la formule précédente ne donnerait pas le volume total engendré par elle, mais la différence entre le volume engendré par sa partie positive et celui qu'engendre sa partie négative: car les éléments de celui-ci deviennent négatifs avec y.

Si une surface plane tourne autour d'un axe situé dans son plan et passant par son centre de gravité, les volumes engendrés par les 2 parties que sépare l'axe sont équivalents, car on a: $\eta = 0$ d'où: $V = 0$.

Cette propriété permettra de trouver le centre de gravité d'un demi-cercle connaissant le volume de la sphère qu'il engendre en tournant autour de son diamètre; et inversement, de calculer le volume d'un tore, connaissant la surface du cercle générateur et la distance de son centre à l'axe.

Cherchons enfin le centre de gravité d'un corps solide quelconque, c.à.d. d'un volume dans lequel on suppose la matière continue.

Soit un point P intérieur de ce volume: entourons-le d'une surface fermée quelconque qui détache un certain volume v; soit m la masse de la

portion du corps contenue dans v : on appelle densité moyenne de ce volume le rapport $\frac{m}{v}$.

Si ce rapport est le même quelle que soit la surface entourant P et le volume compris, la densité est constante, le corps est dit homogène. Si ce rapport est variable, on appelle densité du corps au point P la limite vers laquelle tend ce rapport quand la surface tend vers le point P (et v vers 0.) On admet que cette limite existe ; soit ρ ; et on suppose connue la loi de densité du corps c.à.d. ρ donnée en fonction des 3 paramètres du point P.

Prenons autour de P un élément de volume infiniment petit dv : soit dm la masse qu'il contient ; on aura par définition : $dm = \rho\, dv$ et les coordonnées du centre de gravité seront :

$$\xi = \frac{\iiint x\rho\, dv}{\iiint \rho\, dv} \qquad \eta = \frac{\iiint y\rho\, dv}{\iiint \rho\, dv} \qquad \zeta = \frac{\iiint z\rho\, dv}{\iiint \rho\, dv}$$

On a ainsi 4 intégrales triples à effectuer : on remplacera dv par sa valeur en fonction des 3 coordonnées du point P : $dv = K\, dx\, dy\, dz$

K étant le volume d'un parallélépipède dont les arêtes seraient parallèles aux axes et égales à l'unité de longueur. Le facteur constant K disparaît d'ailleurs, ce qui montre que les formules ne dépendent pas de l'angle des axes (K se réduit à 1 dans le système des axes rectangulaires.) Dans le système de coordonnées polaires, on a la formule aisée à retrouver :

$$dv = r^2 dr \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

en posant : $x = r\sin\theta\cos\varphi \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi \qquad z = r\cos\theta$

On aura alors des intégrales triples en $dr\, d\theta\, d\varphi$.

Quand le corps est homogène, ρ disparaît comme facteur constant, et il ne reste que des éléments géométriques : on a alors : $\iiint dv = V$ volume total.

d'où les formules : $V\xi = \iiint x\,dv \qquad V\eta = \iiint y\,dv \qquad V\zeta = \iiint z\,dv$

Quand le corps est homogène, on peut ramener ces intégrales triples à des intégrales doubles (dans les systèmes de coordonnées cartésiennes et polaires)

Considérons un volume limité latéralement par une surface cylindrique fermée parallèle à Oz, et par 2 surfaces :

$z_1 = f_1(x,y) \qquad z_2 = f_2(x,y)$

Prenons un point P dans la base du cylindre (dans le plan xy) et menons par P une parallèle à Oz, qui rencontre les 2 surfaces en $M_1 M_2$; on a d'abord :

$$V = K\iiint dx\,dy\,dz$$

Intégrons par rapport à z en regardant x, y comme constantes : le point (x, y, z) se déplacera sur M_1M_2 de z_1 à z_2 :

$$V = K\iint dx\,dy \int_{z_1}^{z_2} dz = K\iint (z_2 - z_1)\,dx\,dy$$

intégrale double en dx, dy, car z_1, z_2 sont fonctions de x, y. On obtiendra de même :

$$V\xi = K\iint x\,dx\,dy\,(z_2 - z_1) \qquad V\eta = K\iint y\,dx\,dy\,(z_2 - z_1)$$

Pour la dernière, on a une formule un peu différente :

$$V\zeta = K\iint dx\,dy \int_{z_1}^{z_2} z\,dz = \frac{K}{2}\iint (z_2^2 - z_1^2)\,dx\,dy$$

Ces intégrales doubles seront étendues à la base du cylindre dans le plan des xy.

On retrouverait aisément ces formules par la géométrie, en décomposant le volume en colonnes parallèles à Oz.

Corollaire. Si un solide homogène admet un plan diamétral conjugué d'une direction de cordes, le centre de gravité se trouve dans ce plan.

En effet si l'on prend ce plan pour xOy, la direction des cordes pour Oz,

on a $z_2 = -z_1$ $z_2^2 = z_1^2$ donc $\zeta = 0$.
Cette propriété est d'ailleurs évidente sans calcul, les centres de gravité des prismes infiniment petits parallèles à Oz qui composent le volume étant tous dans le plan des xy, puisque ce sont leurs milieux.
Cette remarque donne immédiatement le centre de gravité d'un tétraèdre Soit ABCD; toutes les cordes parallèles à BC ont leur milieu dans le plan ADE, E étant le milieu de BC. Donc le centre de gravité est le point commun d'intersection des plans médians du tétraèdre; il est aussi le point de concours de ses médianes, car elles sont les intersections mutuelles des plans médians.

Le centre de gravité d'un tétraèdre est le centre de gravité de 4 masses égales situées aux 4 sommets; ou bien: le poids total d'un tétraèdre est la résultante de 4 poids égaux à $\frac{P}{4}$ appliqués aux 4 sommets.
On en conclut que le centre de gravité partage chaque médiane du tétraèdre dans le rapport de 3 à 1.
On peut composer autrement les 4 masses situées aux 4 sommets: les 2 ~~masses~~ poids A et D ont pour résultante $\frac{P}{2}$ appliqué en F milieu de AD; les 2 poids B et C ont pour résultante $\frac{P}{2}$ appliqué en E milieu de BC; donc le poids P du tétraèdre est appliqué au milieu de EF, d'où l'on conclut que ~~les droites~~ le centre de gravité est le point de concours des droites qui joignent les milieux des arêtes opposées.
Il y a un cas particulier où l'on peut ramener les intégrales triples à des intégrales simples: Supposons que dans un solide homogène on connaisse

l'aire d'une série de sections planes parallèles à un plan donné et les centres de gravité de ces sections supposées homogènes. On va voir que cela revient à supposer qu'on sait effectuer 2 intégrations ; il n'en reste alors qu'une. Prenons pour plan des (xy) un plan parallèle aux sections, et pour axe Oz une droite quelconque non située dans ce plan. Soit S_z l'aire de la section plane de cote z ; soient ξ', η' les coordonnées dans son plan de son centre de gravité G' ; ses coordonnées dans l'espace seront ξ', η', z : on connaît S_z, ξ', η' en fonction de z. On a d'ailleurs, en vertu des formules établies pour le centre de gravité d'une surface plane homogène :

$$S_z \xi' = \iint x\,dx\,dy \qquad S_z \eta' = \iint y\,dx\,dy \qquad S_z = \iint dx\,dy$$

les intégrales doubles étant étendues à l'aire S_z. Ces formules permettent de ramener celles du centre de gravité $G(\xi, \eta, \zeta)$ du solide à des intégrales simples. En effet

$$V = K\iiint dx\,dy\,dz = K\int dz \iint dx\,dy = K\int_{z_0}^{z_1} S_z\,dz$$

car quand on considère z comme constant, l'intégrale double $\iint dx\,dy$ représente l'aire S_z. On prendra l'intégrale simple de z_0 à z_1, c. à d. d'un des plans tangents extrêmes à l'autre. On aura d'une manière analogue :

$$V\xi = K\iiint x\,dx\,dy\,dz = K\int dz \iint x\,dx\,dy = K\int_{z_0}^{z_1} \xi' S_z\,dz$$

$$V\eta = K\iiint y\,dx\,dy\,dz = K\int dz \iint y\,dx\,dy = K\int_{z_0}^{z_1} \eta' S_z\,dz$$

$$V\zeta = K\iiint z\,dx\,dy\,dz = K\int z\,dz \iint dx\,dy = K\int_{z_0}^{z_1} z\, S_z\,dz$$

et comme S_z, ξ', η' sont fonctions de z, ces intégrales simples se réduisent à des quadratures.

Ces formules peuvent s'établir géométriquement en décomposant le volume

en tranches d'épaisseur dz et en admettant que le centre de gravité de chacune de ces tranches peut se confondre avec le centre de gravité d'une des bases.

(Voir la suite à la fin du cahier.)

— Nous avons établi précédemment les 6 équations de l'équilibre pour un système absolument libre. Nous allons maintenant chercher les conditions d'équilibre d'un système de corps solides liés entre eux et à des corps fixes. On tiendra compte de ces liaisons en introduisant comme inconnues auxiliaires les forces qui naissent des actions mutuelles des corps mobiles entre eux et des actions des corps fixes sur les corps mobiles. On écrira que chaque corps est en équilibre comme soumis librement aux forces données et aux réactions des autres corps tant mobiles que fixes; on aura ainsi 6 équations pour chaque corps. On éliminera de ces équations les inconnues auxiliaires, qu'on appelle forces de liaison. On verra plus tard que le principe des vitesses virtuelles permet d'écrire tout de suite les équations définitives de l'équilibre sans avoir recours aux forces de liaison qu'on n'introduit que pour les faire disparaître.

A présent nous nous contenterons de traiter par la méthode générale que nous venons d'indiquer quelques cas particuliers où son application est suffisamment simple; ce sont les cas d'équilibre d'un corps géné-

— Cas d'un corps mobile autour d'un point fixe: c'est un levier au sens le plus général. Ce corps est soumis à certaines forces données. Dans sa position d'équilibre, il exerce sur le point d'appui une certaine pression, détruite par la résistance du point fixe; mais inversement ce point exerce sur le corps une réaction égale et opposée, soit OQ. On peut considérer le corps comme libre et en équilibre sous l'action des forces données et de Q. Pour que l'équilibre ait lieu, il faut et il suffit que la résultante des forces données soit égale et directement opposée à OQ; c.à.d. comme on ne

connaît de OQ que le point d'application, et que sa grandeur et sa direction peuvent être quelconques (le p. O étant supposé absolument fixe) il faut et il suffit que la résultante des forces données passe par le point d'appui. La condition est évidemment nécessaire; elle est aussi suffisante, car si la résultante passe par le p. O, on pourra l'y transporter et elle sera détruite par la réaction de ce p. fixe, soit OQ égale et directement opposée à OR.

Pour traduire analytiquement cette condition, prenons 3 axes rectangulaires issus du point d'appui O; soient X, Y, Z les projections de la résultante R, X', Y', Z' celles de la réaction Q; L, M, N les moments de R par rapport aux 3 axes, ou les projections sur les axes de son moment par rapport à O; les moments de Q sont nuls, et l'on a les 6 équations de l'équilibre:

$$X+X'=0 \quad Y+Y'=0 \quad Z+Z'=0 \quad L=0 \quad M=0 \quad N=0$$

Les 3 dernières ne contiennent pas la force Q; elles traduisent les conditions de l'équilibre, à savoir que la résultante passe par le point O, puisqu'elles expriment que son moment par rapport à O est nul. Les 3 (équations premières) définissent la réaction Q égale et directement opposée à R.

On appelle plus particulièrement levier un corps solide ayant un point fixe et soumis à 2 forces données F_1, F_2. Soit Q la réaction du point d'appui O: les 3 forces F_1, F_2, Q doivent se faire équilibre. On sait que pour cela elles doivent être dans un même plan et comme on ne connaît de Q que son point d'application, il faut que F_1 et F_2 soient dans un même plan avec O. Dans ce plan les 2 forces F_1, F_2 devront avoir une résultante passant par le point O: pour cela, il faut et il suffit que leur moment résultant par rapport à O soit nul. Soient OP_1,

OP_2 leurs distances respectives au point d'appui ; il faut que les 2 moments des forces par rapport à O soient égaux et de signes contraires, c.à.d. directement opposés :

$$F_1 . \overline{OP_1} = F_2 . \overline{OP_2}$$

On retrouve ainsi la condition élémentaire de l'équilibre du levier :
Les 2 forces doivent être inversement proportionnelles à leur bras de levier.

— Cas d'un corps mobile autour d'un axe fixe : c'est un treuil au sens le plus général. Prenons l'axe fixe pour axe des z ; nous supposerons d'abord que le corps ne puisse glisser sur l'axe. Le corps solide étant soumis à certaines forces données appuie sur l'axe et exerce certaines pressions en ses différents points ; ces points, étant fixes, exercent à leur tour sur le corps des réactions égales et opposées. On peut considérer le corps comme libre et en équilibre sous l'action des forces données et des réactions : on aura ainsi les 6 équations générales de l'équilibre. Il y aura une équation indépendante des forces de liaison : $N = 0$
car les moments des réactions de l'axe par rapport à cet axe sont tous nuls.
Cette condition est d'ailleurs suffisante : car si l'on fait la réduction des forces données à l'origine, N étant nul, l'axe du couple résultant OG sera perpendiculaire à Oz : la résultante OR sera détruite par la résistance de l'axe, et le couple d'axe OG aussi, car ~~on pourra~~ son plan contient Oz, et on pourra lui donner pour bras de levier un segment de Oz ; les 2 forces qui le composent seront annulées par la résistance de l'axe : il y aura donc équilibre.

Il n'y a donc qu'une condition d'équilibre, parce que la position du corps ne dépend que d'un paramètre (l'angle dont il tourne autour de Oz). Les 5 autres équations serviront à calculer les réactions de l'axe. Pour réduire les liaisons au minimum et obtenir des équations plus simples, supposons qu'on ait fixé l'axe en fixant 2 points seulement du corps O, O'; soient Q', Q'' les réactions de ces 2 points, dont les projections sont $X' Y' Z'$, $X'' Y'' Z''$; soit h le z du point O', c.à.d OO'. Les 6 équations de l'équilibre s'écrivent alors:

$$X + X' + X'' = 0 \qquad L - hY'' = 0$$
$$Y + Y' + Y'' = 0 \qquad M + hX'' = 0$$
$$Z + Z' + Z'' = 0 \qquad N = 0$$

La dernière équation est seule indépendante des réactions, car on ne peut pas éliminer les 6 projections entre les 5 premières. Une fois la condition d'équilibre remplie: $N = 0$, on pourra calculer par ces équations les réactions des 2 points d'appui. On tirera X'', Y'' des 2 dernières; puis X', Y' des 2 premières; la 3e donnera seulement $(Z' + Z'')$, les valeurs particulières de Z' et Z'' restent indéterminées. Cette indétermination, due à l'insuffisance des équations, n'existe pas dans la réalité. Elle résulte de l'hypothèse d'un corps absolument solide, qui n'est qu'une abstraction irréalisée. Tous les corps de la nature subissent au contraire des déformations plus ou moins perceptibles au contact des points fixes, et développent en ces points des forces dues à l'élasticité de la matière; ce sont ces forces nées des déformations insensibles des corps qui déterminent les réactions des points d'appui.

Supposons maintenant que le corps puisse tourner et glisser sans frottement sur l'axe. Les réactions de l'axe devront alors lui être normales; on aura 2 équations de l'équilibre: $Z = 0$, $N = 0$

Ce sont 2 conditions nécessaires et suffisantes, car il faut 2 paramètres pour fixer la position du corps. Les réactions seront déterminées, au moins en partie, par les 4 autres équations ; elles le seront complètement s'il n'y a que 2 points d'appui, car Z' et Z'' sont nuls.

— Cas d'un corps solide posé sur un plan fixe sur lequel il peut glisser sans frottement.

Supposons d'abord que le corps repose sur le plan fixe par un seul point, O ; il exerce sur le plan une certaine pression en O, et le plan de son côté exerce sur le corps en O une réaction égale et opposée, qui est normale au plan et dirigée du côté du corps (puisqu'il n'y a pas de frottement, et que le corps est posé sur le plan et non lié au plan). Soit Q cette réaction normale ; on peut considérer le corps comme libre et en équilibre sous l'action des forces données et de Q. La résultante des forces données doit donc être égale et directement opposée à Q, c.à.d. puisque Q est indéterminée qu'elle doit passer par le point d'appui et être dirigée de façon à presser le corps sur le plan. Cette condition, nécessaire, est aussi suffisante ; car on pourra transporter la résultante au point O, et elle sera alors détruite par la résistance du plan.

Supposons ensuite que le corps mobile repose sur le plan fixe par plusieurs points en ligne droite ; soient $A_1, A_2, \dots A_K$ sur Ox, et dans l'ordre de succession ; soient $Q_1, Q_2, \dots Q_K$ leurs réactions ; elles sont parallèles à Oz, et de même sens (le corps étant supposé posé du côté des z positifs). Ce système de forces parallèles admet une résultante unique $Q = \Sigma Q_1$ appliquée en un point A situé sur Ox entre A_1 et A_K. La résultante des forces

données doit donc être égale et directement opposée à Q, c.à.d. parallèle à Oz, dirigée en sens contraire et rencontrant l'axe Oz entre A_1 et A_K. Ces conditions nécessaires sont aussi suffisantes, comme il est aisé de s'en assurer.

On va retrouver ces mêmes conditions par les formules analytiques. Ecrivons que le corps est en équilibre sous l'action des forces données et des réactions Q_1 Q_2 . . . . Q_K ; soient a_1, a_2, ... a_K les abscisses des points d'appui ; les 6 équations de l'équilibre deviennent alors :

$$X_o = 0 \qquad Y = 0 \qquad Z + \Sigma Q_1 = 0.$$

$$L = 0 \qquad N = 0 \qquad M - \Sigma a_1 Q_1 = 0$$

On a 4 équations indépendantes des forces de liaison, et non davantage car on ne peut éliminer des 2 autres les réactions, qui sont au nombre de 2 au moins. On voit que Z_1 est négatif, car $\Sigma Q_1 = Q$ est essentiellement positif (si Q était nulle, le corps serait absolument libre)

La condition : $LX + MY + NZ = 0$ étant remplie, les forces données ont une résultante unique ; on sait déjà qu'elle est parallèle à Oz et de sens contraire ; enfin, comme $L_1 = 0$, elle doit passer par l'axe Ox.

Soient x, y, z les coordonnées du point d'application de cette résultante ; ~~son~~ z sera quelconque ; $y = 0$ $\qquad M = -xZ_1$

donc $-xZ = \Sigma a_1 Q_1$ $\qquad$ ou $[Z = -\Sigma Q_1]$ $\qquad x = \dfrac{\Sigma a_1 Q_1}{\Sigma Q_1}$

Cette abscisse est la même que celle du centre des forces parallèles Q_1 Q_2 . . . Q_K, et on sait qu'elle est comprise entre les abscisses extrêmes a_1, a_K. Donc la résultante rencontre l'axe Oz entre les points d'appui extrêmes A_1, A_K.

On n'a que 2 équations pour déterminer les K réactions. Elles ne seront entièrement déterminées que si $K = 2$; on aura dans ce cas :

$$Z + Q_1 + Q_2 = 0 \qquad M - a_1 Q_1 - a_2 Q_2 = 0$$

Ces 2 équations ont des solutions déterminées, car le déterminant : $a_1 - a_2$ est différent de 0. — Quand il y a plus de 2 points d'appui, les réactions sont indéterminées, non en réalité, mais dans l'hypothèse d'un corps absolument rigide ; on les déterminerait par des équations déduites des lois de l'élasticité.

Étudions enfin le cas général d'un corps solide reposant par K points quelconques $A_1 A_2 \ldots A_K$ sur le plan des (xy). Les réactions de ces points : $Q_1\ Q_2 \ldots Q_K$ sont toutes normales au plan, c.à.d parallèles à Oz et dirigées dans le même sens. Leur résultante Q sera aussi parallèle à Oz, de même sens, et égale à leur somme : ΣQ_1 ; elle sera appliquée au centre des forces parallèles. On sait que ce point est à l'intérieur de tout contour convexe entourant les points d'appui ; le plus petit des polygones qui enferment tous les points d'appui est un polygone obtenu en joignant certains points d'appui et contenant tous les autres ; on l'appelle le polygone de sustentation. La résultante des forces données devra être égale et directement opposée à Q, c.à.d. qu'elle doit être normale au plan, dirigée vers ce plan, et doit percer ce plan à l'intérieur du polygone de sustentation.

On va retrouver analytiquement ces conditions. Soient $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, ... $a_K b_K$ les coordonnées des K points d'appui dans le plan des (xy) ; les 6 équations de l'équilibre s'écrivent alors :

$$X = 0 \qquad Y = 0 \qquad Z + \Sigma Q_1 = 0$$

$$N = 0 \qquad L - \Sigma b_1 Q_1 = 0 \qquad M - \Sigma a_1 Q_1 = 0$$

On a 3 équations indépendantes des forces de liaison ; ce sont les 3 conditions

de l'équilibre : elles expriment ($N=0$) que le système des forces données a une résultante unique (le couple résultant étant annulé par la résistance du plan) et ($X=0$, $Y=0$) que la résultante est parallèle à Oz. De plus, l'équation : $Z_1 + \Sigma Q_1 = 0$ ou : $Z = -Q$ montre que cette résultante est essentiellement négative, et les 2 dernières équations expriment qu'elle passe à l'intérieur du polygone de sustentation.

K est un nombre entier au moins égal à 3, car nous venons de traiter le cas de 2 points d'appui, qui sont toujours en ligne droite. On a 3 équations pour calculer les réactions : elles ne seront complètement déterminées que dans le cas : $K=3$. Les 3 équations seront alors :

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = -Z$$
$$b_1 Q_1 + b_2 Q_2 + b_3 Q_3 = L$$
$$a_1 Q_1 + a_2 Q_2 + a_3 Q_3 = M$$

et elles donneront une solution unique et déterminée si l'on a :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} \gtrless 0$$

c.à.d si les 3 points d'appui ne sont pas en ligne droite, ce qui rentrerait dans le cas traité ci-dessus.

Si : $K > 3$, on ne pourra déterminer les réactions qu'en tenant compte des déformations et des forces nées de l'élasticité des corps.

Nous allons montrer par un exemple très simple ($K=4$) comment on peut faire intervenir des conditions supplémentaires qui déterminent les réactions en fournissant de nouvelles équations.

Problème. Équilibre d'une table rectangulaire reposant par 4 pieds sur un plan horizontal.

Soit $A_1 A_2 A_3 A_4$ cette table rectangulaire, $B_1 B_2 B_3 B_4$ le rectangle formé par ses pieds ; nous prendrons pour origine le centre O de ce rectangle, dont les dimensions seront $2a$, $2b$; pour Ox, Oy des parallèles aux côtés du rectangle, et pour Oz la verticale (le plan Oxy est horizontal.) Les coordonnées des 4 pieds sont :

$B_1(a, b)$ $B_2(a, -b)$ $B_3(-a, -b)$ $B_4(-a, b)$

Soit P la résultante des poids posés sur la table et du poids de la table, appliquée en un point (x, y, z) situé à l'intérieur du rectangle $A_1 A_2 A_3 A_4$. Les 4 pieds pressent le plan horizontal, qui exerce à son tour des réactions verticales Q_1 Q_2 Q_3 Q_4 sur les 4 pieds. Supposons les conditions d'équilibre remplies, et cherchons à calculer les réactions ; nous aurons les 3 équations générales :

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = P$$

$$aQ_1 + aQ_2 - aQ_3 - aQ_4 = Px \quad \text{ou} \quad Q_1 + Q_2 - Q_3 - Q_4 = \frac{Px}{a}$$

$$bQ_1 - bQ_2 - bQ_3 + bQ_4 = Py \quad \text{ou} \quad Q_1 - Q_2 - Q_3 + Q_4 = \frac{Py}{b}$$

Telles sont les 3 équations qui résultent de nos hypothèses. Pour obtenir une 4e équation qui détermine les 4 réactions, il nous faut faire une hypothèse sur l'élasticité, qui donne lieu à une nouvelle condition. Supposons par exemple (on pourrait faire une foule d'autres hypothèses plus ou moins approchées de la réalité) que le sol soit élastique, de sorte que chaque pied enfonce sous le plan horizontal d'une petite quantité proportionnelle à la pression qu'il exerce ; soient ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 les 4 quantités dont les 4 pieds enfoncent ; comme nous les supposons très petites, elles sont verticales, et proportionnelles aux pressions, c.à.d. aux réactions verticales Q_1 Q_2 Q_3 Q_4.

Supposons d'autre part la table rigide ; les 4 pieds devront être encore dans un même plan après le tassement ; soit OO' la longueur dont s'est affaissé le centre du rectangle ; on a : $OO' = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3}{2} = \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_4}{2}$

d'où : $\varepsilon_1 + \varepsilon_3 = \varepsilon_2 + \varepsilon_4$ ou : $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4 = 0$.

Ces quantités étant proportionnelles à Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, on peut écrire

$$Q_1 - Q_2 + Q_3 - Q_4 = 0$$

c'est la 4e équation cherchée. Ce système de 4 équations donne immédiatement les 4 inconnues ; il suffit de les ajouter membre à membre avec un signe convenable :

$$Q_1 = \frac{P}{4}\left(1 + \frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) \qquad Q_2 = \frac{P}{4}\left(1 + \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)$$

$$Q_3 = \frac{P}{4}\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \qquad Q_4 = \frac{P}{4}\left(1 - \frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)$$

Pour que ces solutions soient acceptables, il faut que les 4 réactions soient positives ou nulles. Or les 4 droites qui ont pour équations :

$$1 + \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \qquad 1 + \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \qquad 1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \qquad 1 - \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$$

joignent les milieux des côtés adjacents du rectangle ; elles forment un losange. Pour que les premiers membres de ces équations soient positifs, il faut que le point (x, y) se trouve par rapport à chaque droite du même côté que l'origine ; donc il doit être à l'intérieur du losange.

Si ce point était extérieur au losange du côté de A_1 par exemple on aurait : $1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} < 0$ d'où : $Q_3 < 0$ $\varepsilon_3 < 0$

résultat absurde, puisque la réaction du plan ne peut être négative, mais qui montre que le pied B_3 tend à se soulever, et en tout cas ne repose plus sur le plan ; on peut donc le supprimer ainsi que Q_3, et recommencer le calcul pour les réactions des 3 autres pieds : on est ramené au cas précédent et

le problème est alors complètement déterminé par les données.

Nous allons maintenant chercher les conditions d'équilibre des systèmes déformables. On appelle systèmes déformables les systèmes dont les éléments ne sont pas invariablement liés les uns aux autres. Dans l'étude de ces systèmes (en statique) on fait un grand usage du principe suivant :

Principe de solidification : Lorsqu'un système déformable est en équilibre, les forces extérieures au système doivent remplir les conditions d'équilibre d'un corps solide. Si l'on a un système déformable en équilibre, on pourra établir des liaisons supplémentaires entre ses éléments, et par suite le solidifier, sans que l'équilibre soit troublé. On aura ainsi 6 équations de l'équilibre comme pour un corps solide ; on écrira que les forces extérieures, c.à.d. les forces appliquées au système autres que les forces de liaison ou réactions mutuelles des éléments du système, se font équilibre comme sur un corps solide de même figure. Ces conditions ne sont pas en général suffisantes pour déterminer la position d'équilibre, ni pour calculer les réactions intérieures ou forces de liaison ; on leur adjoindra d'autres équations déduites de la nature des liaisons.

Exemple : Une chaîne pesante est en équilibre sous l'action de son poids et des réactions des 2 points d'attache de ses extrémités ; si on la suppose solide, on trouve, en vertu du principe de solidification, que son poids doit être équilibré par les 2 réactions appliquées à ses extrémités.

On appelle polygone funiculaire un système de points matériels $M_1 M_2 \ldots M_n$ reliés entre eux dans un ordre linéaire par un fil flexible et inextensible, sans masse. Chaque point est soumis à une certaine force ;

dans la position d'équilibre, tous les brins doivent être tendus ; la figure d'équilibre est donc en général un polygone gauche dont les côtés ont des longueurs déterminées.

Cherchons la condition d'équilibre pour le polygone funiculaire le plus simple, composé de 2 points M_1 M_2 liés par un fil. En appliquant le principe de solidification, on voit immédiatement que les 2 forces F_1 F_2 appliquées en M_1 M_2 doivent être égales et directement opposées : cette condition est nécessaire comme pour une barre droite solide $M_1 M_2$. Mais elle n'est pas suffisante, à cause de la flexibilité du fil : il faut encore que les 2 forces tendent le fil, c.à.d. soient dirigées de manière à écarter les 2 points l'un de l'autre, sans quoi, le fil n'opposant aucune résistance à leur rapprochement, ils se mettraient en mouvement.

F_1 M_1 T' A T M_2 F_2

Dans la position d'équilibre, le fil a une certaine tension que nous allons définir. Supposons-le coupé en A, et supprimons le point M_2 et la force F_2 ; pour maintenir en équilibre la partie M_1A, il faudra appliquer en A une certaine force T' ; d'après ce que nous venons de dire cette force doit être égale et directement opposée à F_1, donc égale et parallèle à F_2. Or cette force T' représente l'action de la partie M_2A du fil sur la partie M_1A dans la position d'équilibre, c.à.d. la tension du fil au point A du côté de M_2 : on voit que cette tension est la même en tous les points du fil, égale et parallèle à F_2. On trouverait de même, en supprimant la partie M_1A et en équilibrant la partie M_2A, que la tension du fil au point A du côté de M_1 est T égale et parallèle à F_1, c.à.d. égale et opposée à T'. Ainsi chaque point du fil est en équilibre sous l'action de 2 forces égales et opposées qui sont

F_1 et F_2; donc la valeur de la tension en un point quelconque du fil en équilibre est égale à la valeur absolue d'une des 2 forces appliquées à ses extrémités.

$$T = |F_1| = |F_2|.$$

Considérons maintenant un polygone funiculaire d'un nombre quelconque de côtés, $(n-1)$ par exemple, composé des n points : $M_1 M_2 M_3 \ldots M_n$, et en équilibre. Le 1er point M_1 est en équilibre sous l'action de la force F_1 qui lui est appliquée et de la tension T_1 du brin $M_1 M_2$; donc $T_1 = -F_1$.

Le point M_2 est en équilibre sous l'action de F_2 et des tensions T_1, T_2 des fils qui y aboutissent. T_1 est ici pris en sens contraire, c.à.d. $T_1 = F_1$; donc T_2 est égale et opposée à la résultante de $F_1 F_2$ appliquées en M_2, soit $M_2 L_2$: on a ainsi à la fois la tension et la direction du brin $M_2 M_3$; Comme on connaît sa longueur, le point M_3 est complètement déterminé ; on raisonnerait de même sur ce point et sur les suivants, jusqu'au dernier M_n ; on connaîtra la tension T_{n-1} du brin $M_{n-1} M_n$; ce dernier point devra être en équilibre sous l'action de T_{n-1} et de F_n, donc F_n est égale et directement opposé à la dernière tension ; le polygone funiculaire est complètement déterminé, et les tensions de chaque brin aussi.

Construisons le polygone des forces $F_1 F_2 \ldots F_n$: en partant d'un p^t quelconque A dans l'espace. En vertu du principe de solidification, les forces données doivent se faire équilibre sur le polygone solide gauche $M_1 M_2 \ldots M_n$, donc leur résultante

est nulle, c'est à dire que le polygone $AF'_1F'_2\ldots$ doit se fermer, et F'_n vient coïncider avec A. Les diagonales successives issues du point A, en y joignant les 2 côtés extrêmes AF'_1, AF_{n-1}, sont respectivement égales et parallèles aux tensions $T_1, T_2 \ldots T_{n-1}$ des brins successifs. Ainsi les côtés du polygone funiculaire en équilibre doivent être respectivement parallèles à la série des diagonales du polygone des forces, ce qui suffit à le déterminer complètement. Cette construction a de plus l'avantage de faire connaître immédiatement la tension d'un côté quelconque du polygone funiculaire au moyen de la diagonale correspondante du polygone des forces.

Théorème. Si toutes les forces appliquées au polygone funiculaire, sauf les 2 extrêmes, sont concourantes en O, la figure d'équilibre est dans un plan passant par O, et toutes les tensions ont des moments égaux par rapport à O.

En effet, considérons le point M_2; il est en équilibre sous l'action des 3 forces $T_1 F_2 T_2$; donc ces 3 forces sont dans un même plan qui contient les points $O M_1 M_2 M_3$. Le point M_3 est en équilibre sous l'action des forces $T_2 F_3 T_3$; donc ces 3 forces sont dans un même plan qui contient les points $O M_2 M_3 M_4$; ce plan coïncide avec le précédent. On démontrerait de même de proche en proche que $M_5 \ldots M_n$ se trouvent aussi dans ce même plan $M_1 M_2 M_3$; donc il contient tous les sommets du polygone funiculaire, c.q.f.d.

Il contient évidemment aussi les forces extrêmes F_1, F_n.

Reste à démontrer que 2 tensions quelconques, T_2 et T_3 par exemple, ont même moment par rapport au point O. Puisqu'il y a équilibre entre les forces T_2 T_3 F_3 appliquées au point M_3, la somme de leurs moments par rapport à un point quelconque, à O par ex. doit être nulle; or le moment de F_3 par rapport à O est nul; donc mom. T_2 + mom. T_3 = 0

Les 2 moments considérés sont donc égaux en valeur absolue; ils seront égaux en valeur algébrique si l'on remarque que les forces T_2 et T_3 sont disposées en sens inverse sur le contour polygonal, et si l'on convient de prendre toutes les tensions dans un même sens de circulation sur le contour. On a donc: mom. T_2 = mom T_3 = mom. T_4 = ... = mom T_{n-2}.

Il faut remarquer que les tensions extrêmes, qui ne sont autres que F_1, F_n, sont exclues de ces égalités, puisqu'elles passent par O.

Le théorème précédent est encore vrai, moyennant une légère modification, quand le point O s'éloigne à l'infini, c.à.d. quand les forces intermédiaires sont parallèles; nous énoncerons:

Théorème. Si toutes les forces intermédiaires appliquées au polygone funiculaire sont parallèles, la figure d'équilibre est dans un plan parallèle à leur direction, et les tensions ont des projections égales sur une perpendiculaire à cette direction.

En raisonnant comme plus haut, on voit que M_1 M_2 M_3 sont dans un même plan, ~~puis~~ qui contient F_2; puis, que M_2 M_3 M_4 sont dans un même plan qui contient F_3, donc qui coïncide avec le précédent, et ainsi de suite jusqu'à M_n inclusivement — Dans le plan du polygone funiculaire,

menons un axe AB perpendiculaire à la direction commune des forces. Puisque les 3 forces T_2 T_3 et F_3 se font équilibre sur le point M_3, la somme de leurs projections sur un axe quelconque, et en particulier sur AB, est nulle. Or la projection de F_3 sur cet axe est nulle; donc les projections de T_2 et de T_3 sont égales en valeur absolue — Elles sont de signes contraires; mais si l'on convient de prendre toutes les tensions dans le même sens sur le contour polygonal, leurs projections seront algébriquement égales. Remarquons ici que cette égalité s'étend même aux tensions extrêmes, c.à d. aux forces F_1 et F_n.

Il suffirait donc de connaître ces 2 forces, ou l'une d'elles et la direction commune des forces intermédiaires, pour calculer les tensions de tous les côtés du polygone funiculaire, et par conséquent les forces intermédiaires elles-mêmes (la figure d'équilibre étant donnée.)

Cas particulier: Nous allons chercher la figure d'équilibre d'un polygone funiculaire soumis à des forces verticales, par ex. les poids des points matériels, et fixé par ses 2 extrémités. On ne connaît pas les réactions des 2 points fixes, c.à d. les forces extrêmes. On pourra néanmoins les construire si l'on suppose qu'il y ait un côté horizontal. Ce que nous allons dire pour une moitié du polygone, en partant de ce côté, pourrait être répété pour l'autre. Soit T la tension de ce côté horizontal, M_1 un de ses sommets. Soient M_2, M_3, ... M_n les sommets consécutifs; P_1, P_2, P_3, ... P_n les poids des points M_1, ... M_n; T_1, T_2, T_3, ... T_n les tensions des côtés successifs à partir

de M_1 ; soient enfin $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_n$ les angles de ces côtés avec l'horizon. Construisons le polygone des forces : menons AT égale et parallèle à la tension T du côté horizontal ; les poids $P_1, P_2, \dots P_n$ s'aligneront bout à bout sur la verticale du p. T, jusqu'en P_n : joignons AP_n : la tension T_n doit être égale et parallèle à AP_n. — Les diagonales successives $AP_1, AP_2, AP_3 \dots$ sont égales et parallèles respectivement aux tensions $T_1, T_2, T_3 \dots$ Le triangle ATP_n donne ainsi à la fois les tensions des brins et leur inclinaison sur l'horizon.

$$P_1 = T\,tg\,\alpha_1 \qquad P_1 + P_2 = T\,tg\,\alpha_2 \qquad P_1 + P_2 + P_3 = T\,tg\,\alpha_3 \dots\dots$$

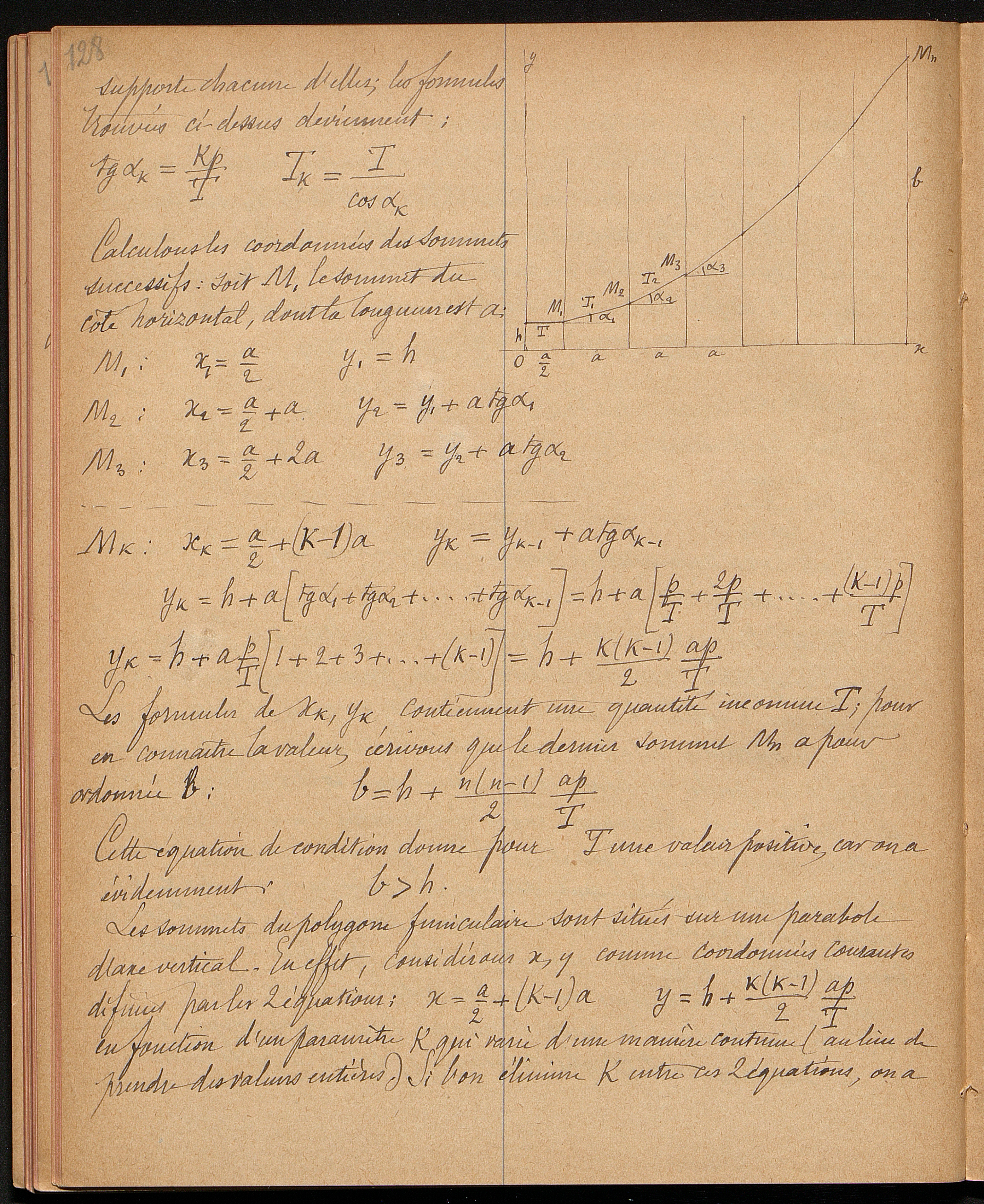
$$\Sigma P_1 = T\,tg\,\alpha_n \qquad P_1 + P_2 + \dots\dots + P_k = T\,tg\,\alpha_k$$

On a pour les tensions : $T_1 = \dfrac{T}{\cos\alpha_1}$ $\quad T_2 = \dfrac{T}{\cos\alpha_2}$ $\quad T_3 = \dfrac{T}{\cos\alpha_3}$

$$T_k = \frac{T}{\cos\alpha_k}$$

On voit que les tensions vont en croissant, et que la tension la plus grande est au point d'attache.

Cas particulier : Nous allons appliquer ces résultats à la figure d'équilibre d'un pont suspendu ; on le projettera sur son plan vertical de symétrie ; on suppose que le tablier du pont est horizontal, et qu'il est porté par des tringles équidistantes attachées au câble. On néglige le poids du câble par rapport au poids du pont, et on admet que toutes les tringles supportent le même poids. On suppose enfin que le câble, qui prend dans cette hypothèse une forme polygonale, a un de ses côtés horizontal. ~~D'autre part, les points d'attache sont connus~~ Prenons pour axe des x la trace du tablier, pour axe des y la verticale passant par le milieu du côté horizontal ; la figure étant symétrique par rapport à cet axe, il suffira de considérer la moitié. Soit h la hauteur du côté horizontal au-dessus de l'axe des x, et soit b la hauteur du point d'attache M_n, qu'on suppose donné. Soit a la distance de 2 tringles consécutives ; soit p le poids constant que



supporte chacune d'elles; les formules trouvées ci-dessus deviennent :

$$\mathrm{tg}\,\alpha_K = \frac{Kp}{T} \qquad T_K = \frac{T}{\cos\alpha_K}$$

Calculons les coordonnées des sommets successifs : Soit M_1 le sommet du côté horizontal, dont la longueur est a ;

M_1 : $x_1 = \frac{a}{2}$ $\quad y_1 = h$

M_2 : $x_2 = \frac{a}{2} + a$ $\quad y_2 = y_1 + a\,\mathrm{tg}\,\alpha_1$

M_3 : $x_3 = \frac{a}{2} + 2a$ $\quad y_3 = y_2 + a\,\mathrm{tg}\,\alpha_2$

— — — — — — — — —

M_K : $x_K = \frac{a}{2} + (K-1)a$ $\quad y_K = y_{K-1} + a\,\mathrm{tg}\,\alpha_{K-1}$

$$y_K = h + a\left[\mathrm{tg}\,\alpha_1 + \mathrm{tg}\,\alpha_2 + \dots + \mathrm{tg}\,\alpha_{K-1}\right] = h + a\left[\frac{p}{T} + \frac{2p}{T} + \dots + \frac{(K-1)p}{T}\right]$$

$$y_K = h + a\frac{p}{T}\left[1 + 2 + 3 + \dots + (K-1)\right] = h + \frac{K(K-1)}{2}\,\frac{ap}{T}$$

Les formules de x_K, y_K contiennent une quantité inconnue T ; pour en connaître la valeur, écrivons que le dernier sommet M_n a pour ordonnée b : $\quad b = h + \frac{n(n-1)}{2}\,\frac{ap}{T}$

Cette équation de condition donne pour T une valeur positive, car on a évidemment : $\quad b > h$.

Les sommets du polygone funiculaire sont situés sur une parabole d'axe vertical. En effet, considérons x, y comme coordonnées courantes définies par les 2 équations : $x = \frac{a}{2} + (K-1)a$ $\quad y = h + \frac{K(K-1)}{2}\,\frac{ap}{T}$ en fonction d'un paramètre K qui varie d'une manière continue (au lieu de prendre des valeurs entières). Si l'on élimine K entre ces 2 équations, on a

y exprimé par un trinôme du 2e degré en x; c'est l'équation d'une parabole d'axe vertical; donc les sommets $M_1 M_2 \dots M_n$, qui correspondent aux valeurs entières de K, sont situés sur cette parabole.

On prouverait d'une manière analogue que les milieux des côtés du polygone funiculaire se trouvent aussi sur une parabole d'axe vertical, et que, de plus, cette parabole est tangente aux côtés, c.à.d. inscrite dans le polygone. Ainsi le câble du pont suspendu est une ligne polygonale comprise entre 2 paraboles inscrite et circonscrite. Si le nombre des tringles augmente indéfiniment en même temps que a tend vers 0, le câble tend à prendre la figure d'une parabole.

On sait que la tension est la plus grande au point d'attache; c'est donc pour ce point qu'on devra prévoir la résistance du câble.

Autre application: Nous allons chercher la figure d'équilibre d'un polygone funiculaire dont tous les côtés ont même longueur, et dont les sommets sont soumis à des forces parallèles égales: on peut supposer que ce sont les poids égaux des points $M_1 M_2 \dots M_n$.

Les formules précédemment trouvées s'appliqueront encore à ce cas en supposant toujours qu'il y ait dans la figure d'équilibre un côté horizontal. Si l'on compte les longueurs à partir du milieu de ce côté sur le contour polygonal, la distance des milieux de 2 côtés consécutifs sera a, longueur commune de tous les côtés; la distance de 2 milieux quelconques sera un multiple de a: $AC_K = Ka$

d'où: $tg\alpha_K = \frac{p}{Ta} . \overline{AC}_K$

Ainsi la figure d'équilibre est telle, que la tangente de l'inclinaison du K^e côté est proportionnelle à la ~~distance~~ longueur du fil depuis A jusqu'au milieu de ce côté.

Si le nombre des points pesants augmente indéfiniment en même temps que a tend vers 0, le polygone funiculaire tend vers une courbe qui est la figure d'équilibre d'une chaîne homogène pesante attachée par ses extrémités : cette courbe est appelée chaînette. Elle est caractérisée par la propriété qu'on vient d'énoncer : si s est la longueur d'un arc AM compté depuis le point le plus bas, si α est l'angle de la tangente à la courbe en M avec l'horizon, on doit avoir :

$$tg\,\alpha = \frac{s}{C}$$

(C étant une constante linéaire, en vertu de l'homogénéité.) On peut, en partant de cette formule, trouver l'équation finie de cette courbe.

$$dx = \cos\alpha\, ds \qquad dy = \sin\alpha\, ds$$

$$ds = \frac{C d\alpha}{\cos^2\alpha} \qquad dx = \frac{C d\alpha}{\cos\alpha} \qquad \text{d'où : } \frac{x}{C} = \log tg\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$dy = \frac{C \sin\alpha\, d\alpha}{\cos^2\alpha} \qquad \text{d'où : } \frac{y}{C} = \frac{1}{\cos\alpha}$$

On néglige les constantes d'intégration, car si l'on prend pour origine le point A, $x=0$ pour $\alpha=0$; quant à y, il suffira de prendre $y=C$ pour $\alpha=0$. — Il n'y a plus qu'à éliminer α entre les 2 équations qui donnent x et y :

$$\cos\alpha = \frac{2\, tg\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{1+tg^2\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{2e^{\frac{x}{c}}}{1+e^{2\frac{x}{c}}}$$

$$\frac{y}{C} = \frac{1}{2}\left[e^{-\frac{x}{c}} + e^{\frac{x}{c}}\right] \quad \text{ou} \quad y = \frac{C}{2}\left[e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right]$$

équation de la chaînette

— On pourra résoudre des questions analogues, qui sont traitées dans la Statique de Poinsot ; par exemple :

Trouver la figure d'équilibre d'un fil attaché à ses extrémités A, B, le long duquel peuvent glisser sans frottement des anneaux soumis à des forces données. — On pourra appliquer à ce problème toutes les formules du polygone funiculaire, car le principe de solidification permet de fixer les anneaux sur le fil. Mais il faudra introduire une condition supplémentaire, à savoir que tous les brins ont la même tension ; cela résulte de ce que les anneaux glissent sans frottement ; ~~et que~~ donc toutes les forces données doivent être bissectrices des angles des brins, puisqu'elles font équilibre aux tensions sur chaque anneau. — Le polygone des forces aura ses sommets tous équidistants du point A, parce que les diagonales, qui représentent les tensions, sont toutes égales ; ces sommets seront donc sur une circonférence ayant pour centre A.

— Les équations de l'équilibre d'un fil flexible et inextensible peuvent s'obtenir en considérant ce fil comme la limite d'un polygone funiculaire dont les côtés tendent tous vers 0 pendant que leur nombre augmente indéfiniment. Mais nous chercherons directement les conditions d'équilibre d'un fil flexible et inextensible soumis à des forces continues. — Nous admettrons que chaque élément linéaire est soumis à une force du même ordre de grandeur que cet élément ; l'élément ds sera ainsi soumis à une force $F ds$, F étant une quantité finie qu'on appelle force au point M (élément ds) rapportée à l'unité de longueur. On donne la valeur de cette force en chaque point du fil ; c.à.d. que l'on connaît ses projections : X, Y, Z ; celles de la force élémentaire seront alors : $X ds$, $Y ds$, $Z ds$.

Définissons maintenant la tension en un point M du fil AB.

Si l'on coupe le fil en M et qu'on supprime la partie AM, il faudra pour maintenir BM en équilibre appliquer en M une certaine force T : cette force est unique (non accompagnée d'un couple) parce que par hypothèse le fil est parfaitement flexible (pas de force de torsion.) Elle est tangente au fil en M, comme il est aisé de le prouver en considérant la position d'équilibre du fil comme la limite d'un polygone funiculaire ; enfin elle est dirigée dans le sens MA, de manière à tendre la partie MB. Si les arcs croissent dans le sens MA, les cosinus directeurs de la tangente MT seront :

$$\frac{dx}{ds} \qquad \frac{dy}{ds} \qquad \frac{dz}{ds}$$

et les projections de la tension T sur les 3 axes seront :

$$T\frac{dx}{ds} \qquad T\frac{dy}{ds} \qquad T\frac{dz}{ds}$$

A, B, M, M', T, −T, −T'

Inversement, si on supprime la partie BM du fil, il faudrait appliquer en M dans le sens MB, pour maintenir MA en équilibre, une force tangentielle égale à −T (en vertu du principe de l'égalité de l'action et de la réaction.)

Considérons maintenant un fil en équilibre, et un élément d'arc dS soumis à la force Fds : on peut l'isoler, à condition de lui appliquer en M, M' les 2 tensions T, −T'. Les 3 forces Fds, T, −T' doivent se faire équilibre, en vertu du principe de solidification. On écrira d'abord que la somme des projections des 3 forces sur chaque axe est nulle. La projection de −T' sur l'axe des x est égale à celle de T changée de signe et augmentée de la différentielle de cette projection quand on passe de M à M' : on a donc :

$$T\frac{dx}{ds} - T\frac{dx}{ds} + d\left(T\frac{dx}{ds}\right) + X ds = 0 \quad \text{ou :}$$

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right) + X ds = 0 \qquad d\left(T\frac{dy}{ds}\right) + Y ds = 0 \qquad d\left(T\frac{dz}{ds}\right) + Z ds = 0$$

On écrira ensuite que la somme des moments des 3 forces par rapport à chaque axe est nulle; mais les 3 équations qu'on trouve ainsi sont des conséquences des 3 précédentes. Si l'on n'admettait pas a priori que la tension en chaque point du fil est tangente à la courbe d'équilibre, on aurait 6 équations indépendantes, dont on pourrait déduire que la tension est tangentielle. On n'a donc que 3 équations distinctes.

Dans le cas le plus général, la force F peut dépendre de la position de l'élément ds dans l'espace, de sa position sur la courbe, enfin de son orientation; on aura des équations de la forme :

$$X = f\left(x, y, z, s, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right) \qquad Y = \qquad Z =$$

On y joindra l'identité :

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$$

qui définit s, et on aura un système de 4 équations différentielles qui définissent par exemple T, x, y, z en fonction de s : en les intégrant, on obtiendra la figure d'équilibre du fil et la tension en chaque point.

Ces équations seront du 1er ordre en T, et du 2e ordre en x, y, z; mais la dernière est seulement du 1er ordre en x, y, z. On pourra prendre arbitrairement les valeurs initiales de : $x, y, z, T, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}$, pour la valeur initiale de s ($s = 0$ par exemple) et $\frac{dz}{ds}$ sera déterminé par cette identité. — On obtiendra ensuite les différentielles secondes puis les dérivées de tout ordre de x, y, z; on pourra les développer en séries de Taylor, et on aura des intégrales générales contenant 6 constantes arbitraires qui correspondent aux 6 données initiales :

$$x = \varphi(s, C_1, C_2, C_3 \ldots\ldots C_6)$$
$$y = \psi(s, C_1, C_2, C_3 \ldots\ldots C_6)$$
$$z = \varpi(s, C_1, C_2, C_3 \ldots\ldots C_6)$$
$$T = F(s, C_1, C_2, C_3 \ldots\ldots C_6)$$

Les 6 constantes sont déterminées dans chaque cas particulier par les conditions aux limites du problème.

Le cas le plus simple est celui d'un fil de longueur donnée, attaché à ses 2 extrémités. On donne les 2 points fixes avec lesquels doivent coïncider ces extrémités ; soient $(x_0\, y_0\, z_0)$. $(x_1\, y_1\, z_1)$. Pour $s=0$, on doit avoir :

$x = x_0 \quad y = y_0 \quad z = z_0$ et pour $s = l$, on doit avoir :

$x = x_1 \quad y = y_1 \quad z = z_1$ Ces 6 équations déterminent les 6 constantes. Ce système d'équations peut d'ailleurs avoir une ou plusieurs solutions, ou même une infinité ; on aura autant de positions d'équilibre correspondant aux différents systèmes de constantes.

On peut encore supposer que l'extrémité A étant fixe, l'extrémité B soit assujettie à glisser sans frottement sur une courbe donnée dont les équations sont : $f_1(x, y, z) = 0 \qquad f_2(x, y, z) = 0$

Pour le point A, on aura les 3 premières équations trouvées ci-dessus ; pour le point B, on sait seulement qu'il est sur la courbe ; donc les coordonnées $x_1\, y_1\, z_1$, qui correspondent à $s = l$, doivent vérifier les équations :

$$f_1(x_1\, y_1\, z_1) = 0 \qquad f_2(x_1\, y_1\, z_1) = 0.$$

on a ainsi 2 nouvelles équations ; mais pour que l'équilibre ait lieu, il faut de plus que la force appliquée au point B soit normale à la courbe : or cette force est la tension, tangente en B au fil ; donc il faut exprimer que le fil est normal à la courbe en B, ce qui donne une 3e équation de condition : on a encore en tout 6 équations.

Si B était assujetti à glisser sans frottement sur une surface donnée, ses coordonnées $(x_1\, y_1\, z_1)$ devraient d'abord vérifier l'équation de la surface, et il faudrait de plus que le fil fût normal en B à la surface, ce qui donnerait 2 équations, soit encore 3 équations pour B.

De même le point A pourrait être mobile sur une courbe ou une surface; il donnerait toujours lieu à 3 équations, soit en tout 6 équations de condition déterminant les 6 constantes.

Il arrive le plus souvent que XYZ ne contiennent pas explicitement s; on peut alors simplifier les équations en y remplaçant ds par $\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$ — Mais alors l'identité disparaît, et il reste 3 équations en T, x, y, z; on pourra choisir x pour variable indépendante, et on obtiendra T, y, z en fonction de x. Les 3 équations sont du 1er ordre en T, du 2e ordre en y, z; donc les intégrales générales du système contiendront 6 constantes qui correspondent aux données;
$T, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$. Ces constantes seront déterminées par les conditions aux limites: on aura 5 équations ~~pour~~ d'où l'on tirera les 5 constantes.

Nous allons chercher les équations intrinsèques d'équilibre du fil, c à d exprimer les conditions de l'équilibre du fil indépendamment du choix d'un système de coordonnées. — Soit MT la tangente en M à la courbe d'équilibre dans le sens des arcs croissants, MC la normale principale dirigée vers le centre de courbure, Mb la binormale; soit ρ le rayon de courbure en M; $\alpha\,\beta\,\gamma$ les cosinus directeurs de MT, $\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1$ ceux de MC; on a:

$$\alpha = \frac{dx}{ds} \qquad \beta = \frac{dy}{ds} \qquad \gamma = \frac{dz}{ds}$$

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha_1}{\rho} \qquad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\beta_1}{\rho} \qquad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\gamma_1}{\rho}$$

Les équations de l'équilibre deviennent: $\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) + X = 0$

$$\frac{d}{ds}(T\alpha) + X = 0 \qquad \alpha\frac{dT}{ds} + \alpha_1\frac{T}{\rho} + X = 0$$

D'où:

$$X = -\alpha\frac{dT}{ds} - \alpha_1\frac{T}{\rho} \qquad Y = -\beta\frac{dT}{ds} - \beta_1\frac{T}{\rho} \qquad Z = -\gamma\frac{dT}{ds} - \gamma_1\frac{T}{\rho}$$

L'interprétation de ces formules est immédiate : si l'on porte sur MT un vecteur égal à $-\frac{dT}{ds}$, sur MC un vecteur égal à $-\frac{T}{\rho}$, la force en M rapportée à l'unité de longueur est la somme géométrique de ces 2 vecteurs. On voit qu'elle est située dans le plan osculateur à la courbe en M :

$$F_t = -\frac{dT}{ds} \qquad F_n = -\frac{T}{\rho} \qquad F_b = 0 .$$

T étant essentiellement positif ainsi que ρ, la composante normale de la force F est toujours négative, c.à.d. opposée au rayon de courbure : donc la force est toujours située du côté de la convexité de la courbe (c'est l'inverse pour l'accélération relativement à la trajectoire.)

Corollaire : Si la force est constamment normale au fil, la tension est constante : en effet : si : $F_t = 0 \quad \frac{dT}{ds} = 0 \qquad T = \text{const}$

C'est ce qui arrive pour un fil tendu sur une surface sur laquelle il peut glisser sans frottement, quand aucune force extérieure n'agit sur lui. En chaque point du fil, la réaction est normale à la surface, donc au fil. Il s'ensuit que les 2 forces extrêmes doivent être égales, et la tension du fil en un point quelconque leur sera égale.

On peut dans certains cas calculer la tension sans avoir besoin de calculer la position d'équilibre. En combinant les 3 équations de l'équilibre, on obtient :

$$\frac{dT}{ds} = -(\alpha X + \beta Y + \gamma Z)$$

c'est une autre forme de l'équation intrinsèque : $F_t = -\frac{dT}{ds}$. On peut l'écrire :

$$dT = -(Xdx + Ydy + Zdz)$$

On pourra intégrer directement quand X, Y, Z ne dépendront que de (x, y, z) (position du point dans l'espace) et quand : $(Xdx + Ydy + Zdz)$ sera une différentielle totale exacte ; en un mot, quand il y a une fonction de forces. Soit :

$$Xdx + Ydy + Zdz = dU$$

On obtient immédiatement la tension : $T = -(V+h)$

On voit que la tension est indépendante de la forme de la courbe d'équilibre ; V étant fonction de $(x\,y\,z)$. On pourra alors porter la valeur de T dans les 3 équations de l'équilibre, mais elles se réduiront à 2, puisqu'on a obtenu T par une combinaison de ces équations. Ces 2 équations du 2e ordre définiront y, z en fonction de x ; leurs intégrales générales contiendront 4 constantes, qui avec h font bien les 5 constantes prévues.

Théorème. Dans le cas où les forces élémentaires appliquées au fil sont parallèles, la figure d'équilibre est une courbe plane, et la projection de la tension du fil sur une perpendiculaire à la direction des forces est constante.

Ce théorème ayant été établi pour un polygone funiculaire peut être considéré comme démontré ; néanmoins, nous allons le démontrer directement.

Supposons toutes les forces données parallèles à Oy : $X=0,\ Z=0$.

Les équations de l'équilibre se réduisent à : $d\left(T\frac{dx}{ds}\right)=0 \quad d\left(T\frac{dz}{ds}\right)=0.$

ou, en intégrant : $T\frac{dx}{ds}=A \qquad T\frac{dz}{ds}=B$

Éliminons T : $B\,dx - A\,dz = 0 \qquad Bx - Az = C$

équation d'un plan parallèle à Oy.

Si on se donne les 2 points d'attache du fil, ce plan est déterminé ; on pourra toujours le prendre pour plan des xy. La force F se projette sur Oy en vraie grandeur : $Y = F$. Les équations de l'équilibre deviennent : $d\left(T\frac{dx}{ds}\right)=0 \qquad d\left(T\frac{dy}{ds}\right)+Y\,ds=0$

La 3e se réduit à une identité, puisqu'on a éliminé z. Intégrons :

$T\frac{dx}{ds}=A$ ce qui prouve que la projection de la tension sur Ox est constante.

$T = A\dfrac{ds}{dx}$ $\qquad A\,d\left(\dfrac{dy}{dx}\right) + Y ds = 0$ $\qquad A dy' + Y ds = 0$

Telle est l'équation différentielle de la courbe d'équilibre ; on obtiendra ensuite la tension.

S'il y a une fonction de forces, on peut calculer directement la tension, puis on porte la valeur de T dans l'équation : $\quad T\dfrac{dx}{ds} = A$ et on en tire la figure d'équilibre.

Pour cela, il faut et il suffit que Y soit fonction de y seulement :

$dT = -Y dy$ On obtient T par une quadrature.

Dans le cas le plus général, Y dépend de la position de l'élément dans l'espace (x, y) de sa position sur la courbe (s) et de sa direction (y') – Si s figure explicitement dans Y, on adjoindra l'équation :

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1$$ (Les équations donneront alors x et y en fonction de s.)

Sinon, on pourra tirer des équations y en fonction de x.

Si Y ne dépend que d'une quelconque des 4 variables précitées, on aura à effectuer une quadrature : supposons par exemple : $\quad Y = \varphi(x)$.

$A dy' + \varphi(x) ds = 0 \qquad A dy' + \varphi(x)\sqrt{1+y'^2}\,dx = 0$

$A\dfrac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}} + \varphi(x) dx = 0$ Les variables étant séparées, intégrons :

$$A \log\left(y' + \sqrt{1+y'^2}\right) = \int \varphi(x)\,dx = C.$$

On en tirera : $\quad y' = f(x)$ d'où : $\quad y = \int f(x)\,dx + C'$

par une seconde quadrature.

Chaînette. Pour un fil homogène pesant, la force qui sollicite chaque élément du fil est son poids élémentaire : si p est le poids de l'unité de longueur du fil, le poids de l'élément ds sera $-p ds$ (axe Oy dirigé verticalement en haut.) La force sera : $\quad Y = -p$.

On a d'abord : $d\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0$ $\qquad T\frac{dx}{ds} = A$

A étant une constante qu'on peut toujours regarder comme positive, car il suffit de compter x croissant dans le même sens que s. La 2e équation devient : $\quad Ady' - pds = 0$

Posons $\frac{A}{p} = a$, $\qquad ds = a\,dy'$.

Toutes les méthodes d'intégration indiquées plus haut s'appliquent ici, car γ étant la constante $-p$ peut être considéré comme fonction d'une quelconque des 4 variables x, y, s, y'.

Prenons y' pour variable indépendante :

$\sqrt{1+y'^2}\,dx = a\,dy'$ $\quad \frac{dx}{a} = \frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}}$ $\qquad$ Intégrons :

$\frac{x-x_0}{a} = \log\left(y' + \sqrt{1+y'^2}\right)$ ou $\quad y' + \sqrt{1+y'^2} = e^{\frac{x-x_0}{a}}$

On a l'expression symétrique : $\quad y' - \sqrt{1+y'^2} = -e^{-\frac{x-x_0}{a}}$

D'où : $y' = \frac{1}{2}\left[e^{\frac{x-x_0}{a}} - e^{-\frac{x-x_0}{a}}\right]$ $\qquad \sqrt{1+y'^2} = \frac{1}{2}\left[e^{\frac{x-x_0}{a}} + e^{-\frac{x-x_0}{a}}\right]$

Intégrons y' : $\qquad y - y_0 = \frac{a}{2}\left[e^{\frac{x-x_0}{a}} + e^{-\frac{x-x_0}{a}}\right]$

On trouve en même temps : $\qquad \sqrt{1+y'^2} = \frac{ds}{dx} = \frac{y-y_0}{a}$.

Pour construire la courbe, on transporte l'origine au point $(x_0\ y_0)$ en posant : $\quad x - x_0 = x_1 \qquad y - y_0 = y_1$

On a dans le nouveau système d'axes $O_1x_1y_1$ $\qquad$ l'équation simplifiée

$$y_1 = \frac{a}{2}\left[e^{\frac{x_1}{a}} + e^{-\frac{x_1}{a}}\right] \qquad \frac{ds}{dx} = \frac{y_1}{a}.$$

O_1x_1 est appelé la directrice de la chaînette. On sait que $a > 0$, aussi la courbe tourne-t-elle sa convexité vers O_1x_1, ce qui était à prévoir,

car c'est la direction de la force $-p$. La tension est donnée par la formule :
$$T = A\frac{ds}{dx} = p(y-y_0) = py_1 .$$

On voit que la tension est proportionnelle à l'ordonnée du point M : elle est égale au poids d'un segment du fil ayant pour longueur y_1. Il en résulte que si l'on place en M une poulie infiniment petite, qu'on laisse pendre la partie supérieure du fil sur cette poulie et qu'on la coupe au niveau de la directrice, le reste du fil restera en équilibre. On peut opérer de même en M' sur l'autre branche, et on aura un fil pesant en équilibre sur 2 poulies M, M'.

y_1

M

M'

y_1'

A

y_1

O_1

x_1

Il y a une fonction de forces : $Y = -p \qquad dT = p\,dy$

$T = p(y-C)$ On retrouve ainsi directement l'expression de la tension, mais on ne sait pas la signification de la constante C ou y_0 comme par l'autre méthode.

On a dans les intégrales générales 3 constantes arbitraires a, x_0, y_0 ; comme le fil se trouve dans un plan déterminé par 2 paramètres, cela fait bien en tout 5 constantes.

On peut déterminer les 3 constantes par les conditions aux limites.

Dans le cas le plus simple, on suppose que le fil a une longueur donnée l et que ses 2 points d'attache sont donnés. Nous prendrons pour origine le plus bas des 2, O, et nous mènerons l'axe Ox de telle sorte que le 2e point A soit du côté des x positifs ; ses coordonnées seront α, β, $\alpha > 0$. On obtiendra 2 équations de condition en faisant

dans l'équation de la chaînette :

$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ puis $\begin{cases} x=\alpha \\ y=\beta \end{cases}$

$$-y_0 = \frac{a}{2}\left[e^{\frac{-x_0}{a}} + e^{\frac{x_0}{a}}\right]$$

$$\beta - y_0 = \frac{a}{2}\left[e^{\frac{\alpha - x_0}{a}} + e^{-\frac{\alpha - x_0}{a}}\right]$$

On obtiendra une 3e équation de condition en écrivant que l'arc OA de la chaînette a la longueur l ; or on a trouvé que :

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+y'^2} = \frac{y-y_0}{a} = \frac{1}{2}\left[e^{\frac{x-x_0}{a}} + e^{-\frac{x-x_0}{a}}\right]$$

L'intégrale indéfinie est : $s = \frac{a}{2}\left[e^{\frac{x-x_0}{a}} - e^{-\frac{x-x_0}{a}}\right]$

et l'intégrale définie entre 0 et α :

$$l = \frac{a}{2}\left[e^{\frac{\alpha-x_0}{a}} - e^{-\frac{\alpha-x_0}{a}} - e^{-\frac{x_0}{a}} + e^{\frac{x_0}{a}}\right]$$

On a ainsi un système de 3 équations à 3 inconnues a, x_0, y_0.

Éliminons y_0 : $\beta = \frac{a}{2}\left[e^{\frac{\alpha-x_0}{a}} + e^{-\frac{\alpha-x_0}{a}} - e^{-\frac{x_0}{a}} - e^{\frac{x_0}{a}}\right]$

puis x_0 entre les 2 équations, qui sont du 1er degré en $e^{\frac{x_0}{a}}$, $e^{-\frac{x_0}{a}}$:

$$l + \beta = a e^{-\frac{x_0}{a}}\left[e^{\frac{\alpha}{a}} - 1\right] \qquad l - \beta = a e^{\frac{x_0}{a}}\left[1 - e^{-\frac{\alpha}{a}}\right]$$

Multiplions membre à membre pour faire disparaître $e^{-\frac{x}{a}} \cdot e^{\frac{x}{a}} = 1$:

$$l^2 - \beta^2 = a^2\left[e^{\frac{\alpha}{a}} + e^{-\frac{\alpha}{a}} - 2\right] = a^2\left[e^{\frac{\alpha}{2a}} - e^{-\frac{\alpha}{2a}}\right]^2$$

$$\sqrt{l^2-\beta^2} = \pm a\left(e^{\frac{\alpha}{2a}} - e^{-\frac{\alpha}{2a}}\right)$$

Le signe + seul convient, car on prend la valeur arithmétique du radical ; or $a > 0$ par hypothèse ;

et on a toujours : $e^{\frac{\alpha}{2a}} > e^{-\frac{\alpha}{2a}}$. Tirons a de cette équation. Posons comme inconnue auxiliaire : $\frac{\alpha}{2a} = u$, d'où : $a = \frac{\alpha}{2u}$.

$$\frac{\sqrt{l^2-\beta^2}}{\alpha} = \frac{1}{2u}\left[e^{u} - e^{-u}\right]$$ à résoudre par rapport à u

Cette équation transcendante n'a qu'une racine positive, car si l'on développe le 2e membre en série : $1 + \frac{u^2}{3!} + \frac{u^4}{5!} + \frac{u^6}{7!} + \dots$ on voit qu'il croît de 1 à ∞ quand u varie de 0 à ∞ : il y aura une racine positive pourvu que $\frac{\sqrt{l^2-\beta^2}}{\alpha} > 1$, ou : $l^2-\beta^2 > \alpha^2$ $l^2 > \alpha^2+\beta^2$

Cette condition de possibilité du problème est géométriquement évidente : il faut que la longueur de la chaînette soit plus grande que la distance des 2 points d'attache : OA. D'ailleurs u doit être positive, car α et a sont essentiellement positifs ; donc, quand la condition précédente est remplie, on a une solution unique pour u, et par suite pour a ; on en tire des valeurs uniques pour x_0 et y_0 au moyen des autres équations ; le problème n'a donc qu'une solution.

Remarquons que, sous la même condition : $l^2 > \alpha^2+\beta^2$, l'équation transcendante en u admet une racine négative égale en valeur absolue à sa racine positive, parce que le 2e membre est pair. Cette racine donnerait une chaînette renversée, tournant sa convexité vers le haut ; cette solution est inacceptable pour un fil inextensible et flexible, car la force (pesanteur dans ce cas) doit être dirigée vers la convexité. Si l'on calcule la tension, on la trouve négative, ce qui montre que chaque élément de la courbe, au lieu d'être tendu, est comprimé par les tensions à ses extrémités, devenues des pressions. On a ainsi la figure d'équilibre d'une chaîne dont les éléments linéaires

seraient incompressibles, comme un chapelet de sphères solides infiniment petites, parfaitement flexible.

Autre cas simple : Supposons que le fil homogène pesant ait une longueur constante, et que ses extrémités soient assujetties à glisser sans frottement sur 2 droites d'un plan vertical. Soit P le point de rencontre de ces droites ; soit AB la position d'équilibre ; on prévoit géométriquement qu'il y en aura toujours une, quelle que soit la longueur donnée (pourvu que les 2 dr. se rencontrent.) La courbe d'équilibre doit être une chaînette de directrice horizontale ayant une longueur l, et normale aux 2 droites fixes. On peut exprimer analytiquement ces 3 conditions en prenant pour origine le point P, et on calculera les 3 constantes qui déterminent la chaînette. Nous allons traiter la question géométriquement. On sait que la figure homothétique d'une chaînette à directrice horizontale est une chaînette à directrice horizontale, et que réciproquement, 2 chaînettes à directrice horizontale sont homothétiques (cela a lieu pour toutes les courbes qui ne dépendent que d'un paramètre ici a ; car en remplaçant x, y, par kx, ky, l'équation ne change pas de forme, et le paramètre est seulement multiplié par k.) Prenons donc une chaînette quelconque de directrice horizontale ; menons-lui 2 normales respectivement parallèles aux 2 droites données (ce qui est toujours possible, mais d'une seule manière, car le coefficient angulaire de la tangente, y', passe 1 fois seulement par toutes les valeurs possibles) la figure P'A'B' est ainsi complètement

déterminée ; soit l' la longueur de l'arc de chaînette $A'B'$. Transportons cette figure en $PA''B''$, en faisant coïncider $P'A'$ avec PA, $P'B'$ avec PB ; cette nouvelle figure est encore complètement déterminée, et l'arc $A''B''$ a la longueur l'. Transformons enfin cet arc par homothétie par rapport au point P, dans le rapport $\frac{l}{l'}$: on aura la unique solution du problème, car l'arc AB ainsi obtenu est un arc de chaînette à directrice horizontale, de longueur l, et normal aux 2 droites fixes. Si le paramètre de la chaînette $A'B'$ est a', et celui de AB est a, on a la proportion : $\frac{a}{a'} = \frac{l}{l'}$.

Problème : Étant donnés dans un plan vertical 2 poulies infiniment petites A, B à la même hauteur, on dispose un fil homogène pesant en laissant pendre les 2 extrémités. On demande la position d'équilibre, en donnant la distance AB et la longueur totale du fil.

– On sait que la figure d'équilibre du fil entre A et B est une chaînette – On déterminera les constantes a, x_0, y_0 au moyen des conditions du problème : on écrira que la tension en A est égale au poids de la partie pendante AA', et de même la tension en B est égale au poids de BB' ; enfin, on sait que $A'B'$ est la directrice de la chaînette cherchée.

A B

A' B'

Addition à la page 111.

Conséquences : Si dans un solide homogène les centres de gravité d'une série de sections parallèles se trouvent dans un même plan, le centre de gravité du solide se trouve dans ce plan.

En effet, prenons ce plan pour plan des yz ; $\xi' = 0$ pour tous les centres de gravité des tranches infiniment petites ; donc : $\xi = 0$.

– Si toutes les sections parallèles ont leurs centres de gravité sur une même droite, le centre de gravité du solide se trouve sur cette droite.

En effet, le centre de gravité total peut être considéré comme le centre de gravité des points de cette droite, chacun ayant la même masse que la section correspondante.

On retrouve ainsi la proposition déjà indiquée, à savoir que le centre de gravité d'un tétraèdre est le point de concours de ses médianes ; car chaque médiane est le lieu des centres de gravité des sections planes parallèles à la face correspondante.

Autre application : Le centre de gravité d'une section d'ellipsoïde parallèle à un plan fixe a pour lieu le diamètre conjugué de ce plan ; donc le centre de gravité d'une tranche d'ellipsoïde comprise entre 2 sections parallèles se trouve sur le diamètre conjugué du plan des bases ; on n'aura qu'à effectuer une intégrale simple le long de la partie de ce diamètre comprise entre les bases.

De même, le centre de gravité d'une section d'un volume de révolution perpendiculaire à l'axe se trouve sur l'axe ; donc le centre de gravité de la portion du volume comprise entre 2 de ces sections se trouve sur l'axe ; comme on connaît les aires des sections

intermédiaires, on n'a qu'à intégrer les points de l'axe Oz de z_0 à z_1 avec les masses correspondantes pour avoir le z du centre de gravité.

Centre de percussion. On peut se proposer de déterminer le centre de gravité d'une aire plane non homogène sachant que la densité en chaque point est proportionnelle à la distance de ce point à un axe situé dans le plan : $\rho = K\delta$ K disparaît dans les formules ; $\rho = \delta$.

Ce centre de gravité ainsi défini est le centre de percussion de l'aire plane par rapport à l'axe. Quand l'axe est donné, G est déterminé. Inversement, quand on donne un centre de percussion G, il existe un axe correspondant, et un seul. Les divers axes et les centres de percussion correspondants forment dans le plan de l'aire considérée un système de pôles et de polaires par rapport à une conique imaginaire dont le centre est le centre de gravité de la surface supposée homogène, c.à.d. le pôle d'un axe situé à l'infini.

Le centre de percussion est aussi le centre de pression qu'on étudie en hydrostatique. On sait que la pression qu'un liquide exerce sur une portion S d'une paroi plane lui est normale, et est appliquée en un point qui est le centre de pression. Or la pression élémentaire sur un élément de surface P est normale au plan, et proportionnelle à la distance PQ du point P à la surface libre (elle est égale au poids d'un cylindre de liquide ayant pour base l'élément P et pour hauteur PQ). Soit AB l'intersection de la surface libre et de la paroi plane.

La pression élémentaire PF est proportionnelle à PQ, donc à PR distance de P à AB. Comme toutes les pressions élémentaires sont parallèles, leur centre de gravité est précisément le centre de percussion de l'aire S par rapport à l'axe AB.

